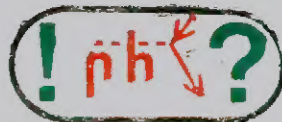


BIBLIOTECA DE FIZICĂ
A ELEVULUI

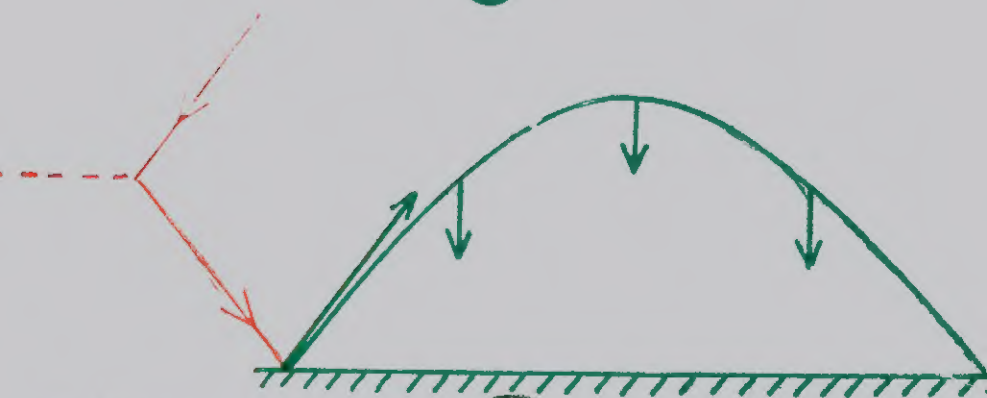


ANATOLIE HRISTEV

PROBLEME de FIZICĂ

pentru licee, bacalaureat
și admitere în facultăți

MECANICĂ O



EDITURA PROMITEU



Lucrarea conține probleme din fizica predată în liceu. Se adresează elevilor din liceu, celor care se pregătesc pentru treapta a II-a de liceu, pentru examenul de bacalaureat și pentru examenul de admitere în învățământul superior.

Pe lângă problemele „obișnuite” rezolvabile cu ajutorul algebrei și trigonometriei, care se învață în prima treaptă de liceu, lucrarea conține probleme de fizică de nivel mediu (notate cu asterisc *), rezolvabile cu ajutorul calculului diferențial și integral, care se învață în treapta a doua de liceu. Elevii din clasele terminale de liceu știu să deriveze și să integreze funcții chiar mult mai complicate decât cele necesare pentru fizica de liceu, dar nu știu să aplice aceste cunoștințe la rezolvarea problemelor de fizică. De aceea autorul dă rezolvări foarte amănunțite pentru aceste probleme. Astfel de probleme vor învăța pe elevi să aplice acest minunat instrument matematic la rezolvarea problemelor de fizică de nivel mediu, învățându-i să facă raționamentul de bază, fizic și matematic, pentru scrierea relațiilor diferențiale ale proceselor sau fenomenelor fizice studiate. Această parte poate fi folosită și de studenți la cursurile de fizică generală. Breviarele se referă în special la aceste probleme.

La sfârșitul cărții se dau **Tabele** utile de constante fizice.

* — probleme rezolvate amănunțit cu ajutorul derivatelor (cl. XI).

** — respectiv cu ajutorul integralelor (cl. XII).

(*), (**) — probleme care conțin și o rezolvare fără derivate, respectiv fără integrale.

Vol. I. **Mecanică** : $556 + 37^* + 98^{**} = 691$ probleme.

Urmează vol. II. **Termodinamică**, vol. III. **Electricitate**, vol. IV. **Optică și Fizică atomică**.

AUTORUL

La realizarea acestei cărți a contribuit prof. Ryurick Marius Hristev.

— INTRODUCERE

Cîteva observații generale privind rezolvarea problemelor notate cu asterisc * (unele din ele, notate cu asterisc în paranteze, se pot rezolva cu matematici elementare).

Mărimile fizice sînt de obicei variabile în spațiu, de la punct la punct, și în timp, de la un moment la altul, adică sînt funcții de coordonate și timp: $f(x, y, z, t)$. Pentru a scrie relații „globale” pentru fenomene și procese avînd loc într-un volum oarecare și într-un interval de timp oarecare ar trebui folosite valori medii — mediate pe volumul și intervalul de timp respective. Dar însuși calculul acestor valori medii implică folosirea calculului integral. De aceea se studiază întii procesele „local”, adică într-un anumit punct (x, y, z) și într-un anumit moment t , mai exact într-un *element de volum* dV situat în punctul considerat (x, y, z) (adică într-un volum ΔV *infinit de mic* — *infinitesimal* — care tinde către zero, restrîngîndu-se la punctul considerat) și într-un interval de timp infinitesimal dt în jurul momentului considerat t (adică într-un interval Δt *infinit mic* — *infinitesimal* — care tinde către zero, restrîngîndu-se la momentul considerat t). Se stabilesc apoi relații „diferențiale” între diferențialele mărimilor interesate și înșirînd se integrează („sumează”) ecuațiile diferențiale obținute pe volumul și intervalul de timp dorite.

În locul cuvintelor: „mărimă infinit mică” („infinitesimală”), diferențiala unei mărimi, vom folosi cuvintele: „element de ...” sau „... elementar(ă)”, de exemplu: *element de arie* dS sau *element de volum* dV , deplasarea *elementară* $d\vec{r}$, lucrul mecanic *elementar* $dL = \vec{F} d\vec{r}$ sau $dL = p dV$ efectuat într-o deplasare *elementară* sau într-un proces *elementar* de destindere a unui gaz, etc.

Iată cîteva exemple simple:

a) Fie o substanță distribuită *neuniform* într-un vas. Raportul

$$\bar{\rho} = m/V \quad (0.1)$$

dă densitatea *medie* pe volumul V . Pentru a obține densitatea într-un punct dat considerăm un *element de volum* dV situat în punctul dorit, avînd masa dm . Atunci raportul

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z) \quad (0.2)$$

ne dă densitatea în *acel punct*. Luînd diferite puncte obținem densitatea $\rho(x, y, z)$ ca funcție de punct. Invers, cunoscînd densitatea $\rho(x, y, z)$ cu care este distribuită substanța, putem calcula masa oricărui element de volum:

$$dm = \rho dV = \rho(x, y, z) dV \quad (0.3)$$

și prin integrare (sumare) pe volumul dorit, găsim masa totală :

$$m = \int dm = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z) dV. \quad (0.4)$$

b) Să calculăm lucrul mecanic efectuat de un gaz perfect într-o transformare izotermă. Să considerăm întâi un proces *elementar* de destindere, adică un proces în care parametrii (p , V) de stare se schimbă *infinit de puțin* (presiunea p se schimbă cu dp , volumul V cu dV). Lucrul mecanic *elementar* efectuat într-un proces *elementar* de destindere este

$$dL = p dV, \quad (0.5)$$

de unde într-un proces finit de destindere de la volumul inițial V_1 până la volumul final V_2 (fig. 0.1) :

$$L = \int dL = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (0.6)$$

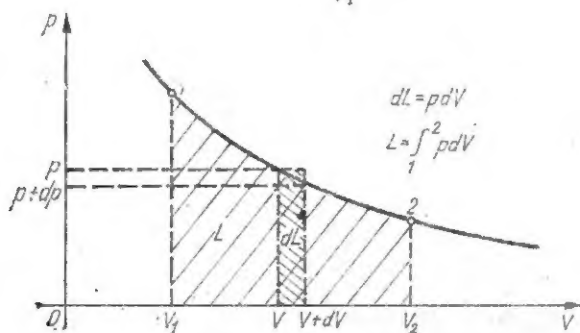


Fig. 0.1

Nu avem voie să scoatem presiunea p de sub semnul integralei decît dacă p ar fi constantă. Pentru a face integrarea trebuie să exprimăm presiunea p în funcție de volumul V . Din ecuația de stare avem

$$p = \nu RT/V, \quad (0.7)$$

deci

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (0.8)$$

(am scos de sub semnul integralei mărimile constante ν , R , T).

c) Fluxul magnetic înmbrățișat de un circuit variază după legea :

$$\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (0.9)$$

Să aflăm t.e.m. indusă ca funcție de timp. Formula

$$\bar{\mathcal{E}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (0.10)$$

ne dă t.e.m. indusă *medie* și anume *mediată* pe intervalul de timp Δt în care fluxul a variat cu $\Delta \Phi$. T.e.m. instantanee la un moment t se obține luînd un interval Δt *infinit de mic* în jurul lui t (care descrește, *tinde* către zero în jurul lui t) și calculînd variația infinitezimală corespunzătoare a fluxului, cu alte cuvinte făcînd *trecerea la limită* :

$$\mathcal{E} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \Phi'(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi}, \quad (0.11)$$

deoarece limita raportului dintre creșterea (variația) funcției și creșterea (variația) variabilei independente reprezintă *derivata* acelei funcții în raport cu variabila respectivă. Punctul deasupra unei litere înseamnă *derivata* acelei mărimi în raport cu *timpul* (notația lui Newton folosită mai ales în mecanică).

Pentru funcțiile de o singură variabilă :

$$df = f'(x) dx, \quad (0.12)$$

adică derivata se reprezintă ca *raport de diferențiale* :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}. \quad (0.13)$$

În cazul nostru derivăm ca funcție de funcție :

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Phi}{d(\omega t + \alpha)} \cdot \frac{d(\omega t + \alpha)}{dt} = \Phi_0 \cos(\omega t + \alpha) \cdot \omega \quad (0.14)$$

d) Numărul de nuclee care se dezintegrează într-un interval de timp *infinit de mic* dt este proporțional cu numărul de nuclee nedezintegrate N existente în acel moment t și cu intervalul de timp *infinitesimal* dt considerat :

$$dN = - \lambda N dt, \quad \lambda = \text{constanta radioactivă} \quad (0.15)$$

(pentru intervale Δt mari nu mai există proporționalitatea amintită), minusul se datorește faptului că numărul nucleelor nedezintegrate scade în timp, deci $dN < 0$. Am obținut o *ecuație diferențială*, adică o relație între funcția (necunoscută), variabila (independentă) și diferențialele lor. Un caz frecvent și important este cazul *separării variabilelor*. Transcriem ecuația diferențială astfel încât într-un membru să apară funcția și diferențiala sa, iar în celălalt membru — variabila independentă și diferențiala sa (constantele pot fi lăsate în oricare membru), pentru a putea integra separat fiecare membru în raport cu variabila sa (*Metoda separării variabilelor*).

Separăm deci variabilele în ecuația (0.15) și integrăm de la $t = 0$ când numărul nucleelor nedezintegrate este N_0 , până la un moment t oarecare când numărul nucleelor nedezintegrate este N :

$$\frac{dN}{N} = - \lambda dt, \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - \int_0^t \lambda dt = - \lambda \int_0^t dt, \quad (0.16)$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = - \lambda t, \text{ de unde } N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (0.17)$$

Se poate face integrarea *nedefinită* (cele două constante de integrare aditive se restrâng la una singură) :

$$\ln N = - \lambda t + C, \quad (0.18)$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția inițială* : la momentul $t = 0$ numărul nucleelor era N_0 , deci

$$\ln N_0 = - \lambda \cdot 0 + C, \text{ de unde } C = \ln N_0, \quad (0.19)$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, \quad N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (0.20)$$

De multe ori este preferabilă integrarea nedefinită în care constanta de integrare se determină din condițiile inițiale sau la limită.

Amintim două teoreme utile :

1. Dacă *suma* a două mărimi variabile este *constantă*, atunci *produsul* lor este *maxim* când ele sînt egale. *Geometric* : Dintre toate dreptunghiurile izoperimetrice aria maximă o are pătratul.

2. Dacă *produsul* a două mărimi variabile este *constant*, atunci *suma* lor este *minimă* când ele sînt egale. *Geometric* : Dintre toate dreptunghiurile de aceeași arie perimetrul minim îl are pătratul.

BREVIAR

Vectorul deplasare $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ are drept componente deplasările pe axe de coordonate: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$. Raportându-le la intervalul de timp Δt obținem viteza *medie* și trecînd la limita $\Delta t \rightarrow 0$, obținem viteza *instantanee* (tangentă la traiectorie):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}. \quad (1.1)$$

Componentele vectorului viteză pe axe de coordonate *ortogonale* sînt egale cu *derivatele* coordonatelor respective în raport cu timpul.

Analog, componentele vectorului accelerație pe axe de coordonate *ortogonale* sînt egale cu *derivatele* componentelor respective ale vitezei, în raport cu timpul, sau cu *derivatele de ordinul doi* ale coordonatelor respective în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{v}},$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = \dot{v}_x = x''(t) = \ddot{x}, \quad (1.2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v'_y(t) = \dot{v}_y = y''(t) = \ddot{y}.$$

Derivata de ordinul doi se scrie cu ajutorul diferențialelor astfel:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f \text{ sau } (\dots)'_x = \frac{d}{dx} (\dots), \quad (1.3)$$

deci $\frac{d}{dx}$ este „operatorul” de derivare în raport cu x .

$$f''(x) = [f'(x)]'_x = \frac{d}{dx} [f'(x)] = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}. \quad (1.4)$$

În cazul unidimensional vom omite indicii:

$$v = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \dot{v} = v''(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad (1.5)$$

de unde

$$dx = v dt, \quad dv = a dt \quad (1.6)$$

și prin integrare:

$$x = \int dx = \int v dt, \quad v = \int dv = \int a dt \quad (1.7)$$

În cazul mișcării circulare neuniforme viteza liniară și cea unghiulară sint

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) = \dot{s}, \quad (1.8)$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \theta'(t) = \dot{\theta},$$

$$s = \theta R, \quad s'(t) = \theta'(t)R \text{ sau } v = \omega R, \quad (1.9)$$

de unde

$$ds = v dt, \quad s = \int ds = \int v dt, \quad d\theta = \omega dt, \quad \theta = \int d\theta = \int \omega dt. \quad (1.10)$$

Accelerația se descompune în componentele normală și tangențială:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \varepsilon R, \quad (1.11)$$

unde ε este accelerația unghiulară:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t) = \dot{\omega} = \theta''(t) = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \ddot{\theta}. \quad (1.12)$$

Mai general, într-o mișcare *curbilinie oarecare* accelerația se descompune în componentele tangențială și normală:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.13)$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei, care se definește prin elementul de arc de curbă ds raportat la unghiul $d\theta$ (în radiani) subîntins, definit de normalele marginale la arcul ds (sau unghiul dintre tangentele marginale), ca în fig. 1.1.:

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad (ds = R d\theta), \quad (1.14)$$

adică arcul ds este aproximat cu un element de arc de cerc (cercul de curbură) de rază R cu centrul de curbură C care subîntinde un unghi la centru $d\theta$.

Lucrul mecanic elementar dL efectuat într-o deplasare elementară $d\vec{r}$ de o forță \vec{F} este definit prin produsul scalar:

$$dL = \vec{F} d\vec{r} = F_t ds, \quad (|d\vec{r}| = |ds|), \quad (1.15)$$

unde F_t este componenta tangențială a forței și ds deplasarea elementară pe traiectorie. În cazul unidimensional:

$$dL = F dx, \quad L = \int F dx. \quad (1.16)$$

Din principiul II al mecanicii rezultă *teorema variației impulsului* pentru punctul material:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1, \quad (1.17)$$

care proiectată pe axe dă ecuațiile algebrice:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{2x} - m v_{1x}, \quad \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m v_{2y} - m v_{1y}. \quad (1.18)$$

Energia potențială a unei particule supuse la forțe conservative se definește prin lucrul mecanic al acestor forțe:

$$dE_p = -dL, \quad \int dE_p = \Delta E_p = -\int dL = -L. \quad (1.19)$$

Alegînd un punct de referință P_0 (de obicei, la infinit) în care considerăm $E_p = 0$, avem pentru un punct P :

$$E_p = -\int_{P_0}^P dL = -L_{P_0 \rightarrow P}. \quad (1.20)$$

De exemplu, energia potențială de interacțiune gravitațională a două particule (sau sfere omogene):

$$\begin{aligned} L_p &= -\int_{\infty}^r F^g d\bar{r} = -\int_{\infty}^r \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -m_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \\ &= \gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Teorema variației energiei mecanice a unei particule supuse la forțe conservative și la forțe neconservative:

$$\Delta E = \Delta(E_c + E_p) = L_{\text{necons.}} \quad (1.22)$$

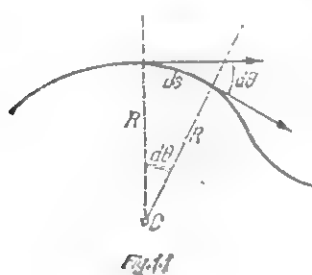


Fig. 11

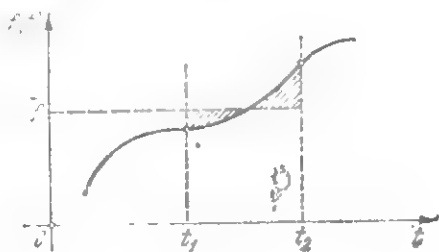


Fig. 12

Momentul de inerție al unui sistem de particule față de o axă:

$$I = \sum_k m_k R_k^2, \quad (1.23)$$

unde R_k sînt distanțele particulelor respective m_k pînă la axă.

În cazul distribuției continue în locul particulei m_k avem elementul de masă $dm = \rho dV$ cu distanța R pînă la axă:

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV, \quad (1.24)$$

unde ρ poate fi scos în afara integralei numai dacă este constant, adică pentru corpuri omogene, cînd integrala devine pur geometrică.

Teorema lui Steiner. Momentul de inerție I al unui corp față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție I_0 al corpului față de o axă

paralelă cu cea dată dar trecind prin CM plus masa corpului înmulțită cu pătratul distanței CM pînă la axa dată :

$$I = I_0 + mR_0^2. \quad (1.25)$$

În cazul rotației în jurul axei fixe :

$$M = I\epsilon, P = M \cdot \omega, P dt = dL = M\omega dt = M d\theta, L = \int M d\theta, \quad (1.26)$$

unde P este puterea și M momentul forțelor în raport cu axa de rotație.

★

Valoarea medie a unei mărimi $f(t)$ pe un interval (t_1, t_2) este aceea valoare constantă \bar{f} care dă aceeași arie de sub grafic ca și mărimea variabilă însăși (fig. 1.2) :

$$\bar{f} \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \bar{f} \int_{t_1}^{t_2} dt, \bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (1.27)$$

Valoarea medie depinde de intervalul pe care se mediază. Pentru mărimi periodice valoarea medie se ia de obicei pe o perioadă (dacă nu se specifică altfel).

Proprietățile valorilor medii :

$$\overline{\text{const}} = \text{const}, \overline{\text{const} \cdot f} = \text{const} \cdot \bar{f}, \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad (1.28)$$

dar în general :

$$\overline{f \cdot g} \neq \bar{f} \cdot \bar{g}, \quad (1.29)$$

unde avem semnul egal numai dacă mărimile f, g sînt independente (statistic necorelate sau necoerente).

Dacă o mărime variază liniar în funcție de un parametru, atunci valoarea sa medie în raport cu acel parametru este egală cu media aritmetică dintre valorile inițială și finală ale acelei mărimi. De exemplu în mișcarea uniform variată $v = v_0 + at$ și atunci $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$,

Exemple :

$$\begin{aligned} \overline{\sin(\omega t + \alpha)} &= \frac{1}{T} \int_0^{T} \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{1}{\omega T} \cos(\omega t + \alpha) \Big|_0^T = \\ &= -\frac{1}{\omega T} [\cos(\omega T + \alpha) - \cos(\alpha)] = 0, (\omega T = 2\pi), \\ \overline{\cos(\omega t + \alpha)} &= 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

ceea ce era evident din interpretarea grafică a valorii medii.

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} &= \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \overline{\cos(2\omega t + 2\alpha)} = \frac{1}{2}, \\ \overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\overline{\sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)} = \overline{\cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta)} = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta), \quad (1.32)$$

$$\overline{\sin(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta)} = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta).$$

Media unei bucle („alternanțe”) de sinusoidă :

$$\overline{\sin \omega t}^{(0 \rightarrow T/2)} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \sin \omega t \, dt = \frac{1}{T/2} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}. \quad (1.33)$$

Pentru un oscilator armonic :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad \bar{E}_c = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{E}{2}, \\ E_p &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad \bar{E}_p = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{E}{2}, \\ k &= m \omega^2, \quad E = E_c + E_p = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Scriind $F = -kx = ma = m\ddot{x}$, obținem ecuația diferențială a oscilatorului armonic :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.35)$$

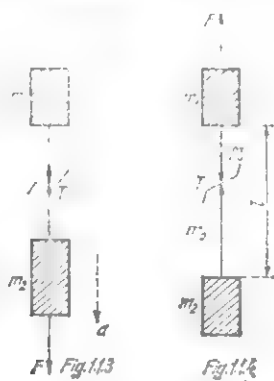
...

1.1. PRINCIPIILE MECANICII

1.1.1. Un fir rezistă la un corp atârnat de masă maximă $m_1 = 8,0$ kg în cazul ridicării corpului cu o anumită accelerație și la masă maximă $m_2 = 12,0$ kg în cazul coborîrii cu aceeași (în modul) accelerație. Care este tensiunea de rupere a firului?

1.1.2. Un camion de masă $m_1 = 3,0$ t tragează accelerat o remorcă de masă $m_2 = 2,0$ t. Forța de tracțiune dezvoltată de camion $F = 2,5$ kN. Considerind că forțele de rezistență sînt proporționale cu greutățile, aflați forța de tensiune din cablul orizontal de remorcare.

1.1.3. Două corpuri de mase $m_1 = 0,100$ kg, $m_2 = 0,300$ kg, legate printr-un fir, sînt trase în jos cu o accelerație $a = 19,8$ m/s², ca în figură. Aflați forța de tracțiune F și tensiunea din fir.



1.1.4. Un corp de masă m_1 este tras în sus cu o forță F . De acest corp este prins un alt corp de masă m_2 prin intermediul unui lanț de masă m_0 , ca în figură. Aflați tensiunea din lanț la o distanță de m_1 egală cu o fracțiune f din lungimea lanțului.

1.1.5. Două baloane meteorologice sferice de diametre egale dar de mase diferite: $m_1 = 3,00$ kg, $m_2 = 1,00$ kg sînt legate între ele printr-un fir lung și coboară liber vertical în atmosferă liniștită de la o înălțime mare. Care va fi tensiunea din fir după un timp suficient de lung?

1.1.6. Ciutura unei fîntîni, umplută cu apă de volum $V = 10,0$ L, are un orificiu prin care curge apa cu debitul $q = 0,100$ L/s. Ciutura este ridicată uniform la suprafață în timpul $\tau = 10,0$ s, dar imediat se rupe sfoara și ciutura cade înapoi în fîntînă de adîncime $h = 4,9$ m. Cîtă apă

va conține ciutura în momentul cînd ajunge în fundul fintinii? (Se neglijează frecările cu aerul).

1.1.7. Un dinamometru este format din doi cilindri coaxiali legați printr-un resort de masă neglijabilă. Trăgînd de cilindrul cu forța $F_1 = 13,0$ N, respectiv $F_2 = 4,0$ N, dinamometrul arată forța $F = 10,0$ N. Aflați raportul maselor cilindrilor.

1.1.8. De tavanul unui vagon este suspendat un corp de masă $m = 2,00$ kg prin intermediul a două fire de aceeași lungime așezate simetric în planul vertical al mișcării, cu unghiul de deschidere $2\alpha = 60^\circ$. Care vor fi tensiunile din fire atunci cînd vagonul frînează cu accelerația $a = 10,0$ m/s²?

1.1.9. Într-un vagon, de două puncte de pe tavan, situate pe direcția orizontală de deplasare a vagonului, se află suspendat un fir ideal trecut printr-un inel greu care alunecă fără frecări pe fir. Cînd vagonul este în repaus unghiul dintre firele de suspensie a inelului este $\alpha = 60^\circ$. Ce accelerație trebuie să aibă vagonul pentru ca inelul să se găsească în echilibru relativ chiar pe verticala unuia din punctele de suspensie ale firului?

1.1.10. În schema din figură se dau: $m = 0,200$ kg, $\alpha = 30^\circ$. Sistemul se mișcă cu accelerația $a = 2,20$ m/s² în sus. Se neglijează frecările. Aflați forța de apăsare pe planul inclinat și tensiunea din fir.

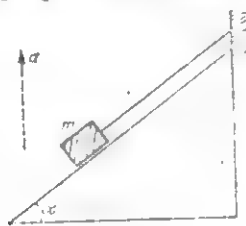


Fig. 1.1.10

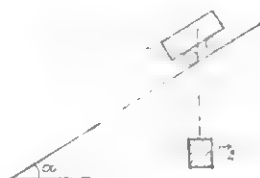


Fig. 1.1.11

1.1.11. Pe un plan inclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ poate aluneca fără frecare un cărucior de masă $m_1 = 10,0$ kg. De cărucior este suspendat printr-un fir un corp de masă $m_2 = 10,0$ kg ca în figură. Căruciorul este ținut în repaus. Care va fi tensiunea din fir imediat după ce i se dă drumul căruciorului?

1.1.12. În sistemul din figură se cunosc masele $m_{1,2}$ și forța F . Scripetii sînt ideali și frecările sînt neglijabile. Aflați viteza relativă la momentul t a unui corp față de altul, dacă vitezele inițiale au fost nule.

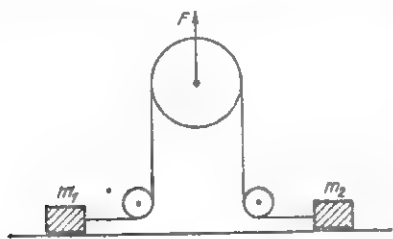


Fig. 1.1.12

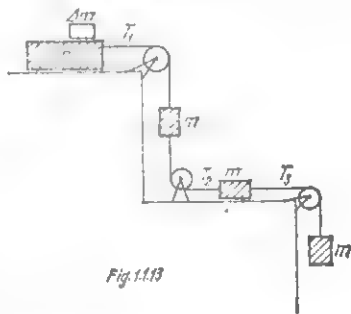


Fig. 1.1.13

1.1.13. În sistemul din figură, fără frecări, aflați T_2 . Se dau: $m = 2,00$ kg, $\Delta m = 1,80$ kg.

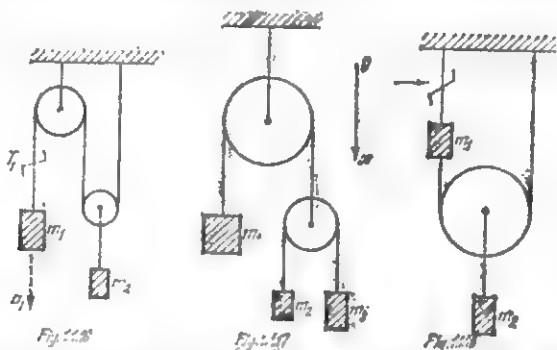
1.1.14. Două seturi de corpuri de mase egale $M = 1,00$ kg (inclusiv masa talerului) sînt legate (talerul) printr-un fir trecut peste un scripet.

pete ideal. De pe un taler se scoate un corp de masă $m_1 = 100 \text{ g}$, iar pe celălalt se așează un corp de masă m_2 . Calculați m_2 astfel ca tensiunea din fir să fie cea inițială.

1.1.15. Peste un scripete ideal, fixat de tavan, este trecută o sfoară avînd la un capăt un corp de masă $M = 1,50 \text{ kg}$, iar la celălalt o bară de care este agățată o pisică de masă $m = 1,00 \text{ kg}$, totul fiind în repaus. Cu ce accelerație (față de Pămînt) trebuie să coboare pisica pentru ca scripetele să nu apese asupra lagărelor sale?

1.1.16. În sistemul din figură scripeții sînt ideali, $m_1 = 1,50 \text{ kg}$, $m_2 = 2,00 \text{ kg}$. Aflați accelerația a_1 și tensiunea T_1 .

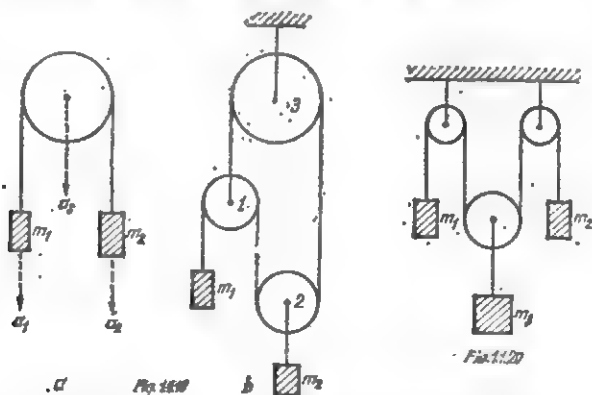
1.1.17. Ce relație trebuie să existe între masele $m_{1,2,3}$ pentru ca în sistemul din figură (cu scripeți ideali) corpul m_3 să rămînă în repaus față de Pămînt?



1.1.18. Două corpuri de mase $m_1 = 2,00 \text{ kg}$ și $m_2 = 1,80 \text{ kg}$ sînt suspendate prin fire și printr-un scripete ideal ca în figură. Unul din fire este tăiat la locul indicat. Care vor fi accelerațiile corpurilor?

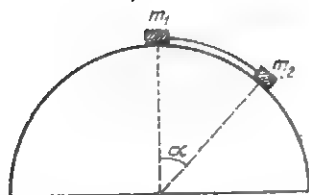
1.1.19. a) Peste un scripete care coboară vertical cu accelerația a , este trecut un fir ideal avînd la capete două corpuri de mase $m_{1,2}$ avînd accelerațiile $a_{1,2}$ față de Pămînt. Stabiliți relația dintre accelerații.

b) Aflați accelerațiile corpurilor din figură (scripeții sînt ideali) și tensiunea din firul trecut peste cei trei scripeți.



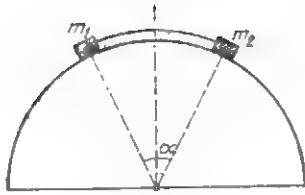
1.1.20. În sistemul din figură scripeții sînt ideali și masele $m_1 = 1,00 \text{ kg}$, $m_2 = 1,00 \text{ kg}$, $m_3 = 2,00 \text{ kg}$. Aflați tensiunea din firul care înfășoară cei trei scripeți.

1.1.21. Pe un semicilindru sînt așezate două corpuri mici de mase $m_1 = 2,00 \text{ kg}$, $m_2 = 6,00 \text{ kg}$ legate între ele printr-un fir, ca în figură.



a.

Fig. 1.121



b

Lăsând corpurile libere accelerația în acest moment este $a = 6,00 \text{ m/s}^2$. Care va fi accelerația inițială dacă așezăm corpurile simetric? (Frecările sînt neglijabile).

1.1.22. O picătură de ploaie cade vertical. Ea întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. În momentul cînd viteza picăturii era $v_1 = 2,5 \text{ m/s}$, accelerația ei era $a_1 = 4,9 \text{ m/s}^2$. Lîngă suprafața Pămîntului picătura nimereste pe geamul lateral al unui vagon lăsînd o urmă înclinată cu unghiul $\alpha = 60^\circ$ față de verticală. Aflați viteza vagonului.

1.2. CINEMATICA ȘI DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Mișcarea rectilinie uniformă

1.2.1. Un tren se mișcă cu viteza $v = 54 \text{ km/h}$ spre Vest. Un călător de pe platforma vagonului simte vîntul suflînd dinspre Nord. Cînd viteza trenului se dublează, călătorul simte vîntul suflînd dinspre Nord-Vest. Care este viteza și direcția vîntului față de Pămînt?

1.2.2. Două trenuri merg paralele în sensuri opuse cu vitezele $v_1 = 18 \text{ km/h}$, $v_2 = 36 \text{ km/h}$. Din primul tren se aruncă spre al doilea un pachet cu viteza relativă $v' = 8,0 \text{ m/s}$, orizontal și perpendicular față de primul tren. Aflați viteza relativă și unghiul ei față de al doilea tren.

1.2.3. Un călător aflat într-un tren de lungime $l_1 = 900 \text{ m}$, care se mișcă cu viteza $v_1 = 54 \text{ km/h}$, vede un timp $t_1 = 60 \text{ s}$ un tren vecin de lungime $l_2 = 600 \text{ m}$ care merge paralel cu primul tren și în același sens. Cît timp va vedea fiecare călător trenul celălalt, dacă trenul al doilea se va mișca în sens opus cu aceeași viteză?

(*) **1.2.4.** Un elev înoată cu viteza $v_0 = 0,50 \text{ m/s}$. În ce direcție față de normala la țărm trebuie să înoate spre celălalt mal pentru ca apa care curge cu viteza $v_a = 1,00 \text{ m/s}$ să-l deplaseze cît mai puțin la vale?

1.2.5 a) Cum trebuie orientată o barcă pentru a ajunge la malul opus al unui rîu, indiferent în ce punct dar în timpul *minim*?

b) Ce viteză minimă a bărcii este necesară și cum trebuie orientată pentru a ajunge pe malul opus al rîului într-un anumit punct fix dat?

1.2.6. Steagul de pe catargul unei nave formează un unghi $\alpha_1 = 60^\circ$ cu direcția navei, cînd nava are viteza $v = 20 \text{ km/h}$. Dublînd viteza navei, unghiul devine $\alpha_2 = 30^\circ$. Aflați viteza vîntului. La ce viteză a navei steagul va sta perpendicular pe direcția navei?

1.2.7. În gara Ploiești ($s_0 = 60$ km de București) se află în repaus un tren. Din gara București pleacă în direcția Ploiești-Brașov un tren cu viteza $v_1 = 50$ km/h. După $t_0 = 1,5$ h de la plecarea acestuia, pleacă și trenul din Ploiești spre Brașov cu viteza $v_2 = 60$ km/h. După cât timp și unde se vor întâlni trenurile. Reprezentați pe aceeași diagramă legile mișcării.

1.2.8. O barcă cu motor parcurge pe un râu distanța de la portul A la portul B în $\tau_1 = 1,5$ h și înapoi în $\tau_2 = 3,0$ h, avind aceeași viteză față de apă. Cu cât timp mai târziu trebuie să plece această barcă din A spre a întâlni o barcă identică care pleacă din B spre A astfel încât după întâlnire cele două bărci să se întoarcă înapoi fiecare și să meargă pe apă durate egale?

1.2.9. Din două localități A și B pleacă simultan, rectiliniu uniform, unul spre celălalt, doi bicicliști. După întâlnire, primul biciclist după $t_1 = 10$ min ajunge în B, iar al doilea parcurgînd $s = 6,0$ km în $t_2 = 40$ min ajunge în A. Aflați viteza primului biciclist.

1.2.10. Undeva la mijlocul Mării Negre, pe fund, s-a instalat un microfon. În apropierea microfonului, pe fundul mării, considerat plan, s-a produs o explozie. Intervalul dintre primul și al doilea semnal înregistrat de microfon a fost $T_1 = 1,00$ s, iar între primul și al treilea (slab) $T_2 = 3,00$ s. Știind viteza sunetului în apă $c = 1,5$ km/s, aflați la ce distanță de microfon s-a produs explozia și la ce adîncime.

1.2.11. Un om aflat la distanță de o șosea observă la un moment dat, sub un unghi $\alpha = 75^\circ$ față de normala la șosea, un camion venind cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s, ca în figură. Sub ce unghi β față de normala la șosea

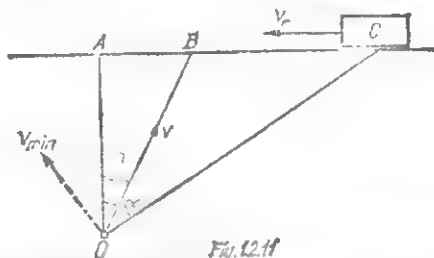


Fig. 12.11

trebuie să alerge rectiliniu omul cu viteza $v = 3,0$ m/s pentru a putea întâlni camionul? Cu ce viteză minimă trebuie să alerge omul pentru a putea întâlni camionul?

1.2.12. Un autoturism se mișcă cu viteza $v_1 = 22$ m/s în spate unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Când distanța dintre autoturism și autocamion devine $d_1 = 30$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depășirea autocamionului, dar observă în același timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanță minimă d_2 trebuie asigurată între autobuz și autoturism pentru a efectua în siguranță manevra de depășire, astfel ca, după depășire, autoturismul să fie la distanța $d_2 = 40$ m în fața autocamionului?

1.2.13. O coloană de sportivi de lungime l aleargă cu viteza v . În întîmpinarea lor fuge un antrenor cu viteza u . La întîlnirea fiecărui sportiv cu antrenorul, sportivul o ia imediat înapoi cu aceeași viteză v . Ce lungime va avea coloana după ce antrenorul ajunge la ultimul sportiv? Discuție. Care SC este mai convenabil? Caz particular: $u = v$.

1.2.14. Pe o șosea merge o coloană de automobile cu viteza $v = 72$ km/h fiecare automobil avînd lungimea $l = 4,0$ m și păstrînd distanța $d = 20$

m între automobile. La întâlnirea cu o mașină a Poliției venind în întâmpinare cu viteza $u = 54$ km/h, fiecare șofer reduce viteza la $v' = 36$ km/h. Care va fi noua distanță d' dintre automobile? Care SC este mai convenabil pentru rezolvare? Care trebuie să fie distanța d minimă necesară, respectiv viteza v' minimă? Dacă lungimea coloanei era $L = 460$ m, care este noua lungime L' a coloanei?

1.2.15. Două avioane zboară unul spre celălalt cu aceeași viteză $v = 504$ km/h fiecare. Care va fi distanța dintre avioane în momentul cînd un semnal sonor ($c = 340$ m/s), emis de un avion și reflectat de celălalt, se întoarce înapoi la primul după un timp $T = 68$ s?

1.2.16. Într-un tren care merge cu viteza $v_1 = 72$ km/h loviturile unui ciocan se succed la un interval $T_1 = 1,00$ s. Ce interval de repetiție a loviturilor va înregistra un călător dintr-un alt tren care merge cu viteza $v_2 = 90$ km/h în sens opus primului, apropiindu-se, respectiv depărtându-se de primul tren? (Viteza sunetului $c = 340$ m/s).

1.2.17. Lingă un perete vertical stau doi oameni la distanțele $l_1 = 50$ m, $l_2 = 63$ m de perete și la distanța $r = 20$ m între ei, ca în figură. Ce durată maximă τ trebuie să aibă un cuvînt pronunțat de primul om pentru ca cel de-al doilea să nu audă cuvîntul suprapus peste ecou? Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

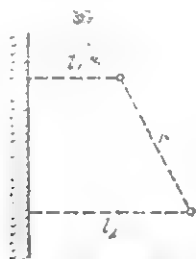


Fig. 1.2.17

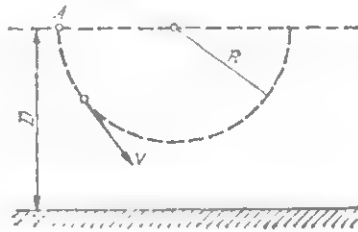


Fig. 1.2.18

1.2.18. Două camioane se mișcă uniform pe două șosele rectilinii care se întretaie sub unghi drept, cu vitezele $v_1 = 60$ km/h, $v_2 = 50$ km/h. Cînd distanța dintre camioane este minimă, primul camion este aflat la distanța $s_1 = 5,0$ km de intersecția șoselelor. La ce distanță s_2 de intersecție se găsește în acest moment cel de-al doilea camion?

1.2.19. Într-un riu care curge uniform cu viteza $u = 0,50$ m/s cade o piatră la distanța $d = 10,0$ m de țărm. După cît timp valurile ajung, cu viteza $v = 1,0$ m/s, la țărm în dreptul pietrei?

1.2.20. La distanța $D = 200$ m de țărm o barcă cu motor descrie pe lac un cerc de rază $R = 100$ m pornind din punctul A, cu viteza $v = 2,00$ m/s, ca în figură. După cît timp ajung primele valuri la țărm, viteza valurilor fiind $u = 0,50$ m/s?

— Mișcarea rectilinie uniform variată

1.2.21. Se dă graficul forței în mișcarea rectilinie, viteza și coordonata inițiale fiind nule. Desenați graficul vitezei și graficul coordonatei în funcție de timp.

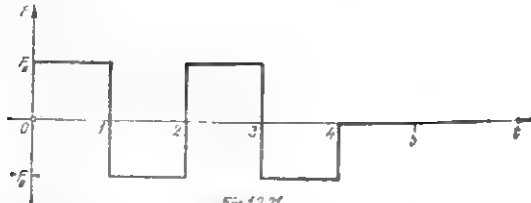


Fig. 12.21

1.2.22. O particulă pleacă din repaus din originea axei Ox sub acțiunea forței reprezentate în figură. Reprezentați grafic viteza și coordonata particulei în funcție de timp.

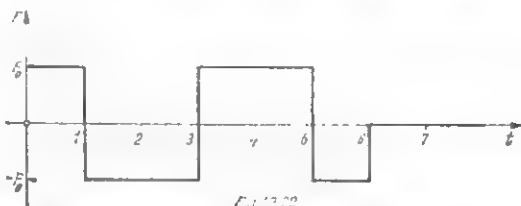


Fig. 12.22

1.2.23. Pentru o mișcare rectilinie pe axa Ox se dă graficul vitezei. Dese- nați graficul accelerației și al coordonatei, știind că $x = 0$ la $t = 0$.

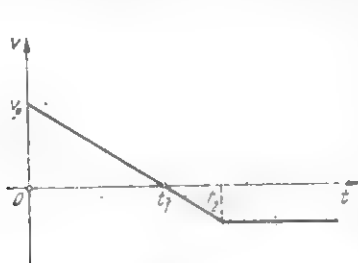


Fig. 12.23

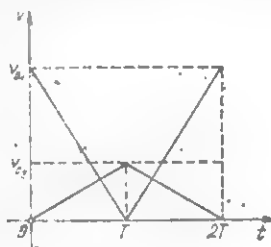


Fig. 12.24

*) **1.2.24.** Două particule pleacă la momentul $t = 0$ din originea axei Ox avind vitezele reprezentate în figură. Aflați distanțele maximă și minimă dintre ele.

1.2.25. Un corp pornește din repaus uniform accelerat și după par- curgerea unei distanțe atinge viteza $v = 14,1$ m/s. Ce viteză a avut corpul cind a parcurs jumătate din distanță?

1.2.26. Un motociclist frinează uniform. În timpul $t = 2,0$ s el par- curge jumătate din distanța de frinare. În cit timp parcurge întreaga dis- tanță de frinare?

1.2.27. Un vagon frinat uniform a parcurs distanța $s_m = 400$ m până la oprire. Ce distanță a parcurs vagonul în prima jumătate a timpului de frinare?

1.2.28. Un vagon frinat uniform s-a oprit în timpul $t_m = 141$ s. În cit timp a parcurs prima jumătate din distanța de frinare?

1.2.29. Un camion pornește din repaus uniform accelerat și după un timp atinge viteza $v = 10$ m/s. După aceasta motorul este decuplat și camionul se mișcă uniform încetinit până la oprire. Aflați viteza medie a camionului pe întregul parcurs.

1.2.30. Un corp pornește din repaus uniform accelerat și parcurge o anumită distanță. De cite ori viteza medie din a doua jumătate a dru- mului este mai mare decit cea din prima jumătate?

1.2.31. Un tren începe să frîneze uniform și parcurge distanța $s = 75$ m pînă la oprire. În intervalul de timp de la $t_2 = 2,0$ s la $t_1 = 1,00$ s înainte de oprire trenul parcurge o distanță $d = 2,25$ m. Aflați viteza inițială a trenului.

1.2.32. Un vagonet parcurge distanța $s = 18$ km dintre două stații în $t = 20$ min și anume în primele $t_1 = 5,0$ min pornește uniform accelerat și apoi uniform încetinit pînă la oprire. Aflați accelerația pe prima porțiune.

1.2.33. Un vagonet pornește uniform accelerat fără viteză inițială și parcurge astfel o distanță $d_1 = 60$ m, după care merge uniform încetinit și parcurge astfel o distanță $d_2 = 40$ m pînă la oprire. Știind durata totală $T = 100$ s a mișcării, calculați accelerațiile în cele două mișcări.

1.2.34. Un mobil pornește uniform variat din originea axei Ox cu viteza inițială $v_0 = 15,0$ m/s. După un timp t' în punctul $x' = 10$ m viteza mobilului este $v' = -10,0$ m/s. Aflați distanța parcursă de mobil în acest timp și vitezele medii $\langle v \rangle$, $\langle |v| \rangle$.

1.2.35. Printr-o gară trece un tren marfar cu viteza constantă $v = 3,0$ m/s, iar după $\tau = 10,0$ s trece prin gară un tren accelerat cu viteza $v_0 = 20,0$ m/s și care începe să frîneze cu accelerația $a = -2,00$ m/s². După cit timp se vor întîlni trenurile. Reprezentați pe aceeași diagramă legile mișcării trenurilor.

(*) **1.2.36.** Un camion parcurge o distanță $l = 400$ m cu viteză constantă v_0 , după care frînează cu accelerația $|a| = 1,0$ m/s². Pentru ce viteză constantă v_0 timpul total de mișcare va fi minim?

1.2.37. Un copil coboară cu sania un plan înclinat de lungime $l_1 = 40$ m în timpul $t_1 = 10$ s, apoi parcurge pe planul orizontal încă $l_2 = 20$ m pînă la oprire. Aflați: a) viteza la baza planului, b) accelerațiile, c) timpul total de mișcare, d) viteza medie (în modul).

1.2.38. Un paralelipiped de lungime $l = 49$ cm luncă fără frecare pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$. El eclipsează două surse punctiforme în timpul $t_1 = 0,20$ s, respectiv $t_2 = 0,10$ s, ca în figură. În cit timp fața frontală a paralelipipedului străbate distanța dintre surse?

1.2.39. De o parte și de alta a unui dublu plan înclinat (unghi diedru) cu unghiurile $\alpha_1 = 30^\circ$ și $\alpha_2 = 60^\circ$ față de orizontală, sînt așezate două corpuri de masă m_1 , respectiv m_2 , legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal din vârful planului. Se neglijează frecările. Diferența de nivel dintre corpuri este inițial $h = 1,00$ m. După $\tau = 0,53$ s cele două corpuri ajung la același nivel. Aflați raportul maselor.



Fig. 1.2.38

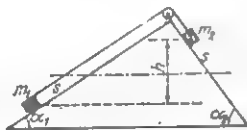


Fig. 1.2.39

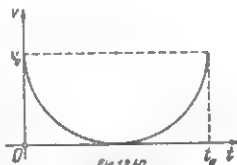


Fig. 1.2.40

1.2.40. Viteza unui corp variază după graficul din figură care reprezintă o semielipsă. Distanța parcursă de acest corp în timpul t_0 este egală cu distanța parcursă uniform în același timp de un alt corp cu viteza $v' = 8,6$ m/s. Aflați viteza inițială a primului corp.

1.2.41. De un tren de masă $M = 110$ t, care merge rectiliniu uniform, se desprinde la un moment dat ultimul vagon de masă $m = 10,0$ t. Acesta parcurge o distanță $d = 3,0$ km pînă se oprește. La ce distanță de vagon se va găsi în acest moment trenul, dacă forța de tracțiune a locomotivei

a rămas aceeași? Toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea.

1.2.42. De un tren care se mișcă rectiliniu uniform se desprinde la un moment dat ultimul vagon care parcurge uniform încetinit o distanță $d = 2,0$ km pînă se oprește. a) Știind că din momentul desprinderii trenul se mișcă cu accelerația $a_1 = 0,010$ m/s², iar vagonul cu accelerația $a_2 = -0,10$ m/s², aflați distanța s parcursă de tren de la desprindere pînă în momentul opririi vagonului. b) Știind masa trenului $M = 110$ t și a vagonului $m = 10,0$ t și considerînd că forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea, iar forța de tracțiune a locomotivei a rămas constantă aflați s .

1.2.43. Un tren de masă $M = 110$ t se mișcă orizontal rectiliniu uniform cu viteza $v_0 = 72$ km/h. La un moment dat se desprinde ultimul vagon de masă $m = 10,0$ t. După $t = 3,0$ min mecanicul pune frînă astfel încît după alte $t' = 20$ s se oprește simultan cu vagonul. Considerînd că toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea, aflați cu ce accelerație a frînat trenul.

— Mișcarea sub acțiunea gravitației

1.2.44. Dintr-un turn înalt se aruncă vertical în sus un corp cu viteza inițială $v_0 = 7,0$ m/s (în vid). Ce distanță parcurge corpul în timpul $t = 3 v_0/g$? Care va fi distanța sa pînă la punctul de lansare?

1.2.45. O rachetă pornește vertical în sus cu accelerația $a = 4,9$ m/s². După $t = 5,0$ s motorul este oprit. Cu ce viteză cade racheta pe Pămînt?

1.2.46. Sunetul de la ciocnirea unei pietre de fundul unei prăpăstii se aude după $t = 10,0$ s de la începutul căderii pietrei. Aflați adîncimea prăpăstiei, știind viteza sunetului $c = 340$ m/s.

1.2.47. Un corp în cădere liberă parcurge în ultimul interval de timp $\tau = 1,0$ s o distanță $l = 19,6$ m. De la ce înălțime a căzut corpul?

1.2.48. În ultimele secunde τ înainte de atingerea Pămîntului un corp în cădere liberă parcurge o fracțiune $f = 0,36 = 36\%$ din înălțimea totală de la care cade. Aflați ce fracțiune din timpul total de cădere reprezintă intervalul τ .

1.2.49. Un corp aruncat vertical în sus de pe sol trece printr-un punct de două ori: la momentul $t_1 = 1,0$ s, respectiv $t_2 = 2,0$ s de la lansare. Aflați înălțimea acestui punct.

1.2.50. Să se împartă înălțimea $h = 100$ m de la care cade liber un corp în $n = 10$ intervale de lungimi s_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) parcurse în același timp fiecare.

1.2.51. Picăturile de pe streșina unui bloc cad la un interval de timp τ una după alta. Știind că după timpul $t = 2,0$ s de la desprinderea unei picături, distanța sa pînă la picătura precedentă este $l = 24,5$ m aflați intervalul τ .

1.2.52. De la o înălțime h cad liber fără viteză inițială două corpuri unul după altul, al doilea cade în momentul cînd primul a parcurs $d = 16,0$ m. În momentul cînd primul atinge suprafața Pămîntului, cel de-al doilea se află la înălțimea $h' = 104$ m de suprafața Pămîntului. Aflați înălțimea h .

1.2.53. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 4,9$ m. De la ce înălțime trebuie aruncat simultan cu viteza $v_0 = 6,0$ m/s vertical în jos un al doilea corp pentru ca cele două corpuri să ajungă simultan pe Pămînt?

1.2.54. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu aceeași viteză inițială $v_0 = 19,6$ m/s, la un interval de timp τ unul după altul. Determinați τ astfel ca cele două corpuri să se întâlnească la o înălțime egală cu o fracțiune $f = 0,64$ din înălțimea maximă la care ele pot ajunge.

1.2.55. De la o înălțime $h = 19,6$ m cade liber un corp. Cu ce viteză inițială v_0 trebuie aruncat în jos de la aceeași înălțime un al doilea corp, la un interval de timp $\tau = 1,00$ s după primul, pentru ca cele două corpuri să se întâlnească chiar la suprafața Pămîntului?

1.2.56. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 29,4$ m/s și $v_{02} = 19,6$ m/s, corpul 2 la un interval de timp τ după primul. Între ce limite trebuie să fie cuprins τ pentru ca cele două corpuri să se întâlnească în aer. Reprezentați pe aceeași diagramă legea mișcării.

1.2.57. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_{01} = 9,8$ m/s. După un timp $\tau = 1,00$ s se aruncă după el un al doilea corp. Determinați viteza inițială v_{02} a acestuia astfel ca cele două corpuri să se întâlnească în momentul cînd corpul 2 este la înălțimea sa maximă. Reprezentați legea mișcării.

1.2.58. O rachetă pornește din repaus vertical în sus de pe suprafața unei planete. În timpul $\tau = 3,0$ s de la pornire toate obiectele din rachetă apăsau pe platane sau întindeau resorturile cu forțe de $n = 1,8$ ori mai mari decît în racheta în repaus. După timpul τ și pînă la căderea rachetei pe planetă toate obiectele din rachetă se aflau în stare de imponderabilitate. Cît timp s-a aflat în zbor racheta? (Se consideră $g = \text{const}$)

(*) **1.2.59.** Două bile sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02} la un interval de timp τ una după alta. Determinați τ astfel ca bilele să se întâlnească după un timp minim de la aruncarea primei bile.

1.2.60. Un corp este aruncat dintr-un turn cu viteza orizontală $v_0 = 9,8$ m/s. Aflați raza de curbură a traiectoriei în punctul unde ajunge corpul după $\tau = 1,00$ s.

1.2.61. Ce viteză orizontală poate avea un titirez conic cu $h = 4,9$ cm, $r = 2,5$ cm, astfel încît sărînd de pe masă (fără frecări) să nu se lovească de marginea mesei? (Vd. figura).

(*) **1.2.62.** Un schior intră cu viteza $v_0 = 12$ m/s pe o trambulină al cărei capăt este orizontal. Neglijînd frecările, aflați pentru ce înălțime h a trambulinei „bătăia” b (distanța orizontală) după părăsirea trambulinei va fi maximă.

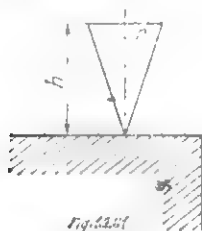


Fig. 1.2.61

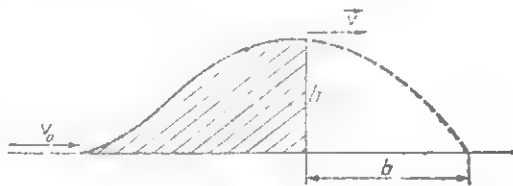


Fig. 1.2.62

1.2.63. Dintr-un turn se aruncă simultan, orizontal, în sensuri opuse, două corpuri cu vitezele $v_1 = 4,0$ m/s, respectiv $v_2 = 25$ m/s. După cît timp unghiul dintre vitezele celor două corpuri devine egal cu 90° ?

1.2.64. Dintr-un furtun iese (la nivelul solului) apă cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s. Ce arie maximă poate fi udată? ($g = 10$ m/s²).

1.2.65. Un elev aruncă spre virful unui copac de înălțime $h = 10,0$ m, situat la distanța $b = 30$ m, o piatră care cade la rădăcina copacului. Ce viteză i-a imprimat pietrei?

1.2.66. Un corp este lansat cu viteza v_0 în sus de-a lungul planului inclinat din figură. Se cunosc: $v_0 = 10$ m/s, $\alpha = 45^\circ$, $h = 4,0$ m. Aflați înălțimea maximă la care se ridică corpul (frecările sînt neglijabile).

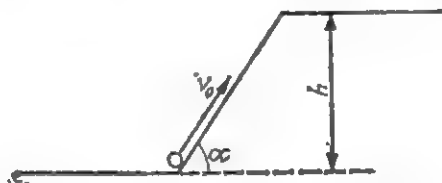


Fig.1.2.66.

1.2.67. Un elev aruncă o piatră de la înălțimea $h = 2,00$ m peste un dig de înălțime $H = 6,4$ m și lățime $b = 1,00$ m. Cu ce viteză minimă trebuie să arunce, sub ce unghi și la ce distanță de dig?

1.2.68. Două corpuri sînt aruncate cu aceeași viteză inițială, sub același unghi față de orizontală, unul liber în aer (vid), celălalt de-a lungul unui plan inclinat fără frecări. Care corp se va ridica mai sus?

1.2.69. O particulă de masă $m = 0,40$ kg are la $t = 0$ viteza $v_0 = 4,0$ m/s. Cum trebuie aplicată particulei o forță constantă F de modul $F = 3,2$ N (alte forțe nu există) astfel ca vectorul vitezei să se rotească cu un unghi $\alpha = 30^\circ$ fără să-și schimbe modulul? Care va fi modulul vectorului deplasare pentru acest interval de timp?

(**) **1.2.70.** O particulă are traiectoria plană $y = kx - bx^2$, unde $k = 3,0$, $b = 2,0$ m⁻¹. Știind că particula are accelerația constantă paralelă cu axa Oy și în sens opus $|\vec{a}| = a = 10$ m/s², aflați viteza particulei în originea axelor de coordonate.

(*) **1.2.71.** Dintr-un turn de înălțime $h = 4,9$ m se aruncă o bilă cu viteza $v = 9,8$ m/s. Sub ce unghi trebuie aruncată pentru ca bătaia, măsurată de la baza turnului să fie maximă? Cît este această bătaie? Cît timp durează mișcarea?

1.2.72. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza inițială $v_0 = 19,6$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45^\circ$ față de orizontală. După cît timp și la ce înălțime vectorul vitezei formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala?

1.2.73. Două corpuri sînt aruncate din același punct cu aceeași viteză inițială $v_0 = 10,0$ m/s sub unghiurile $\alpha_1 = 30^\circ$, respectiv $\alpha_2 = 60^\circ$. Care este distanța dintre corpuri după $t = 1,00$ s?

1.2.74. O țință de pe un deal se vede sub unghiul $\beta = 6^\circ 17'$ față de orizontală. Distanța pe orizontală pînă la țință este $d = 4,00$ km. Știind viteza inițială $v_0 = 280$ m/s a obuzului, aflați unghiul α de tragere. Care este viteza minimă necesară pentru a atinge țința?

(**) **1.2.75.** Un corp de masă $m = 1,00$ kg este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 10,8$ m/s și se întoarce înapoi pe Pămînt cu viteza $v' = 8,8$ m/s. Forța de frecare cu aerul este proporțională cu viteza. Aflați: a) timpul de mișcare al corpului, b) puterea medie disipată prin frecare.

(*) **1.2.76.** Într-o sală de sport, de înălțime $H = 7,0$ m, respectiv $4,6$ m, se aruncă o bilă cu viteza $v_0 = 14$ m/s, de la o înălțime $h = 2,1$ m. La ce distanță maximă pe podea se poate arunca bila? Dar într-un coș situat la înălțimea $h' = 4,0$ m?

1.2.77. Dint-un punct de pe suprafața Pământului se aruncă simultan o mulțime de bile identice, cu aceeași viteză $v_0 = 4,0$ m/s, simetric în toate părțile. Care este raza b a cercului situat pe suprafața Pământului în exteriorul căruia cad $f = 25\%$ din numărul total de bile?

1.2.78. De la o înălțime $H = 17,3$ m cade liber un corp. Simultan de pe Pământ, la o distanță $d = 30$ m de verticala de cădere a primului corp, se aruncă un alt corp, astfel încît cele două corpuri să se întâlnească în aer. Aflați viteza și unghiul de lansare.

1.2.79. Din cauza rotației Pământului corpurile nu cad după direcția forței de greutate (a firului cu plumb). Evaluați deviația unui corp care cade de la o înălțime $h = 98$ m la latitudinea $\varphi = 45^\circ$.

— Forțe de frecare

1.2.80. Poate o forță de frecare să accelereze un corp? Argumentați!

1.2.81. O bară uniformă și omogenă de lungime l , lunecă accelerat pe un plan orizontal rugos, trasă fiind la capete de forțele orizontale longitudinale $F_{1,2}$ de sensuri opuse. Aflați tensiunea din bară la distanța x de primul capăt.

1.2.82. Două corpuri de mase $m_1 = 6,0$ kg, $m_2 = 4,0$ kg sînt așezate pe un plan orizontal și legate între ele printr-un fir orizontal care rezistă pînă la o tensiunea de rupere $T_r = 80$ N. Coeficientul de frecare la lunecare este același pentru ambele corpuri. Cu ce forță orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mișcării?

1.2.83. Un tren de masă $M = 1000$ t se mișcă rectiliniu uniform. De tren se desprinde o garnitură de masă $m = 100$ t. Considerînd un coeficient de frecare echivalent $\mu = 5,0 \cdot 10^{-3}$ și că forța de tracțiune a locomotivei rămîne neschimbată, aflați accelerația relativă a locomotivei față de garnitură (pînă la oprirea acesteia).

1.2.84. De un tren care merge orizontal rectiliniu uniform cu viteza $v_0 = 80$ km/h se desprinde o garnitură cu masă egală cu o fracțiune $f = 1,3$ din masa trenului. După un anumit timp viteza garniturii desprinse se micșorează de $n = 2,0$ ori. Aflați viteza locomotivei în acest moment, dacă forța de tracțiune a rămas neschimbată, iar forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea.

1.2.85. Două corpuri 1 și 2 sînt legate printr-un fir orizontal și așezate pe un plan orizontal avînd același coeficient de frecare. Dacă de corpul 1 se trage orizontal cu o forță $F = 100$ N, corpurile se mișcă accelerat și tensiunea din fir este $T_1 = 30$ N. Care va fi tensiunea din fir dacă tragem cu aceeași forță de corpul 2?

1.2.86. Pe platforma orizontală a unui vagonet de masă $M = 40,0$ kg se află o ladă de masă $m = 10,0$ kg de care se trage orizontal cu o forță F . Între vagonet și șine frecarea este neglijabilă, iar între ladă și platformă $\mu = 0,40$. Pentru ce valoare a forței F începe lunecarea lăzii?

1.2.87. O forță $F = 60$ N este aplicată unei sînii de masă $m = 40$ kg sub unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală, o dată în sus, o dată în jos. Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,10$. De cîte ori accelerația în primul caz este mai mare decît în al doilea?

1.2.88. O ladă este tirată uniform accelerat în sus pe un plan înclinat. Forța necesară este minimă cînd unghiul dintre forță și planul înclinat este $\beta = 15^\circ$. Aflați unghiul de frecare dintre ladă și plan.

1.2.89. Pe un plan orizontal stă o scindură de masă $M = 10,0$ kg peste care este așezat un corp de masă $m = 7,3$ kg. Unghiul de frecare la alunecare între scindură și plan este $\varphi_1 = 15^\circ$, iar între corp și scindură $\varphi_2 = 30^\circ$. Cu ce forță minimă trebuie trasă scindura pentru ca m să lunece pe scindură?

1.2.90. În figură se dau: $l = 2,00$ m, $\mu = 0,20$. Scindura începe să se miște orizontal cu accelerația $a = 3,0$ m/s². În cât timp corpul cade de pe scindură?

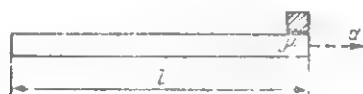


Fig. 1.2.90



Fig. 1.2.51

1.2.91. Pe platforma orizontală a unui vagonet de masă $M = 20$ kg care se poate mișca orizontal fără frecare, se așează o ladă de masă $m = 2,0$ kg de care se trage orizontal cu o forță F . Lungimea platformei în direcția tragerii este $l = 1,00$ m, iar coeficientul de frecare la alunecare între ladă și platformă este $\mu = 0,25$.

- a) Pentru ce valoare a forței F ladă începe să lunece pe platformă?
b) După cât timp ladă cade de pe platformă dacă $F = 20$ N?

1.2.92. Trei corpuri de mase egale $m = 1,00$ kg sînt așezate pe un plan orizontal unul după altul și legate între ele prin fire orizontale, care rezistă pînă la o tensiune de rupere $T_r = 4,0$ N. Coeficienții de frecare la alunecare sînt respectiv $\mu_1 = 0,30$, $\mu_2 = 0,20$, $\mu_3 = 0,10$. De corpul 3 se trage orizontal pe direcția corpurilor cu o forță lent crescătoare. Care dintre cele două fire de legătură se va rupe mai întîi și la ce valoare a forței F ? Dar dacă tragem de corpul 1?

1.2.93. Un cărucior este legat printr-un fir de o greutate ca în figură. Scripetele este ideal și frecarea la rostogolire este neglijabilă. Dînd drumul căruciorului acesta se mișcă cu o anumită accelerație. Dacă blocăm o osie cu roți căruciorul se mișcă cu o accelerație de $k = 1,5$ ori mai mică. De cîte ori se micșorează accelerația dacă blocăm toate roțile căruciorului?

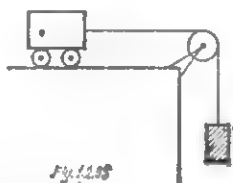


Fig. 1.2.93

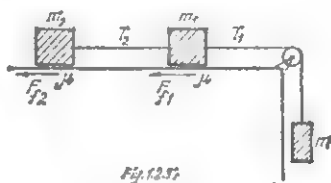


Fig. 1.2.52

1.2.94. În figură $m_1 = 7,0$ kg, $m_2 = 5,0$ kg, $m = 1,0$ kg. Scripetele este ideal, iar coeficientul de frecare între corpuri și masă $\mu = 0,10$. Inițial înainte de a lăsa sistemul liber, $T_{2\text{ia}} = 0$. Aflați tensiunile din fire și forțele de frecare.

1.2.95. Pe o masă orizontală stă o lădiță de masă $M = 3,00$ kg și coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,30$. De lădiță este prinsă o sfoară orizontală, trecută peste un scripete ideal și celălalt capăt atîrnînd liber. La un moment dat de capătul liber se agață o pisică de masă $m = 1,50$ kg, în același moment lădița începe să lunece și pisica se cațără pe sfoară astfel încît rămîne la același nivel față de Pămînt. Aflați accelerația lădiței.

1.2.96. Un corp de masă $m_1 = 8,0$ kg stă pe o scindură de masă $m_2 = 2,0$ kg, care la rândul ei stă pe o masă orizontală fără frecări. Coeficientul de frecare între corp și scindură este $\mu = 0,50$. Scindura este trasă de o forță orizontală $F = c \cdot t$, unde $c = 9,8$ N/s. În ce moment începe mișcarea corpului și la ce moment accelerația scindurii devine de $n = 3,0$ ori mai mare decât a corpului?

1.2.97. La capătul unei scinduri de lungime $l = 2,00$ m și masă $m_2 = 2,00$ kg este așezat un mic corp de masă $m_1 = 0,50$ kg. Coeficientul de frecare la alunecare între scindură și planul orizontal este $\mu_2 = 0,30$, iar între corp și scindură este $\mu_1 = 0,20$. Ce viteză trebuie imprimată scindurii pentru ca ea să iasă de sub corp?

1.2.98. O săniuță coboară liber, fără viteză inițială, pe un plan înclinat după care intră pe un plan orizontal (racordat cu cel înclinat) și se oprește undeva. Știind că din punctul de oprire virful planului înclinat se vede sub unghiul $\beta = 6,0^\circ$ față de orizontală, aflați unghiul de frecare dintre săniuță și zăpadă.

1.2.99. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 15^\circ$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului de $n = 2,0$ ori mai mică decât pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului. Aflați coeficientul de frecare la alunecare.

1.2.100. Pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de $n = 2,5$ ori mai mare decât o forță minimă orizontală. Aflați coeficientul de frecare dintre corp și plan.

1.2.101. O pană cu unghi de deschidere $\alpha = 30^\circ$ este bătută într-un butuc de lemn. Determinați coeficientul de frecare minim între pană și butuc pentru ca pana să nu sară înapoi (greutatea panii este neglijabilă).

1.2.102. Un corp de masă $m = 20$ kg este tras cu forța $F = 120$ N pe un plan orizontal. Dacă forța face unghiul $\alpha_1 = 60^\circ$ cu orizontală, corpul se mișcă uniform. Aflați accelerația corpului dacă forța face unghiul $\alpha_2 = 30^\circ$ cu orizontală.

1.2.103. Un corp este tras de o forță dată sub un unghi α față de orizontală. Unghiul de frecare este $\varphi = 18^\circ$. Pentru ce unghi α accelerația va fi maximă?

1.2.104. Un lanț este așezat pe zidul din figură, unde $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,27$. Aflați raportul lungimilor l_2/l_1 în momentul cînd lanțul începe să lungească spre dreapta.

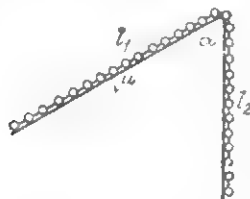


Fig. 104

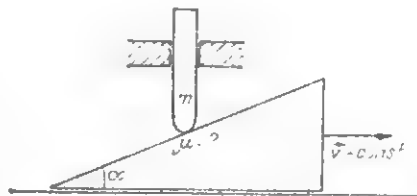


Fig. 105

1.2.105. Un corp este lansat de-a lungul unui plan înclinat cu viteză inițială v_0 . Unghiul de frecare dintre corp și plan este $\varphi = 30^\circ$. Ce unghi de înclinare trebuie să aibă planul pentru ca corpul să parcurgă pe el o distanță minimă?

1.2.106. În figură tijă de masă $m = 0,50$ kg se mișcă fără frecare în ghidajele sale. Știind că prisma de unghi $\alpha = 15^\circ$ se mișcă rectiliniu uniform pe masă fără frecare, aflați coeficientul de frecare la alunecare dintre tijă și prismă, precum și forța cu care tijă apasă pe prismă.

1.2.107. Un corp lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ revine înapoi la baza planului astfel încât timpul de coborire este cu $f = 50\%$ mai mare decât timpul de urcare. Care este coeficientul de frecare? De câte ori este mai mare viteza de lansare decât viteza de sosire? Dar accelerația de urcare față de cea de coborire?

1.2.108. Pe fața unei prisme cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala se pune un corp care are unghiul de frecare cu fața prisme $\varphi = 15^\circ$. Cu ce accelerație orizontală putem mișca prisma pentru ca corpul să nu lunece?

1.2.109. În sistemul din figură se dau $m = 10,0$ kg, $M = 10,0$ kg, $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 15^\circ$ (unghi de frecare). Cu ce forță orizontală F trebuie

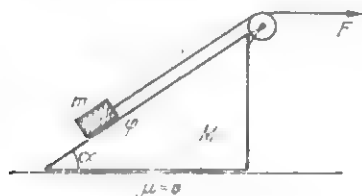


Fig. 12.109

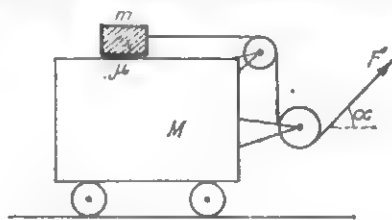


Fig. 12.110

tras pentru ca corpul m să urce pe plan și să nu se desprindă de plan? (Scripetele este ideal).

1.2.110. Pe platforma unui vagonet de masă $M = 3,0$ kg (care se mișcă fără frecări) este așezat un corp de masă $m = 2,0$ kg care are coeficientul de frecare $\mu = 0,40$ cu platforma. Care este forța minimă necesară, sub unghiul $\alpha = 30^\circ$, pentru ca m să lunece pe platformă?

1.2.111. Cu ce accelerație orizontală trebuie deplasat blocul din figură pentru ca cele două corpuri identice să nu lunece pe bloc, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu = 0,60$? (Scripetele este ideal).

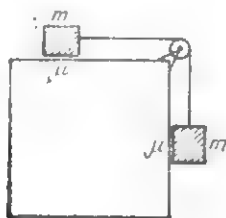


Fig. 12.111

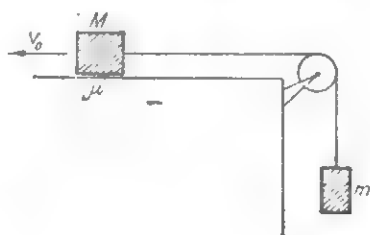
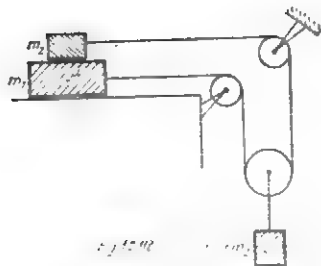


Fig. 12.112

1.2.112. În sistemul din figură se cunosc $m = 1,00$ kg, $M = 1,00$ kg, $\mu = 0,50$ și viteza inițială $v_0 = 4,9$ m/s. Aflați ce distanță parcurge corpul M în timpul $t = 2t_m$, unde t_m este timpul pînă la oprire.

1.2.113. Se dă sistemul din figură pentru care coeficientul de frecare între corpuri $\mu = 0,20$, iar planul orizontal este fără frecări. Aflați pentru ce raport m_1/m_2 corpurile $m_{1,2}$ se vor mișca cu aceeași accelerație.



1.2.114. Un creion rotund luncă uniform într-o carte deschisă formind un unghi diedru cu deschiderea $\beta = 60^\circ$ și cu muchia înclinată cu $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală. Aflați coeficientul de frecare la alunecare.

1.2.115. Pe o șosea, înclinată cu $\alpha = 0,10$ rad, acoperită cu polei, coboară un camion, avind coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,020$. Cu ce accelerație trebuie să coboare pentru ca roțile să nu patineze? (Toate roțile sînt motoare.)

1.2.116. Pe un drum rectiliniu orizontal de lungime $l = 100$ m situat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 15^\circ$ circulă un cărucior. Coeficientul de frecare între roți și teren $\mu = 0,30$. Care este timpul minim posibil de parcurgere?

1.2.117. Un corp este tras accelerat în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ cu o forță F care face unghiul β cu planul înclinat. Unghiul de frecare cu planul $\varphi = 15^\circ$. Pentru ce unghi β forța F va fi minimă?

1.2.118. Un schior atinge la coborire pe panta de $\alpha = 20^\circ$ a unui munte o viteză limită $v_0 = 72$ km/h, unghiul de frecare cu zăpada fiind $\varphi = 5,0^\circ$, iar forța de rezistență din partea aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei. Ce viteză limită poate atinge schiorul pe o pantă cu $\alpha' = 35^\circ$?

1.2.119. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 6,0^\circ$ stă o scîndură de masă $m = 35$ kg avind unghiul de frecare $\varphi = 11^\circ 28'$ cu planul. Cu ce accelerație trebuie să alerge un om de masă $M = 70$ kg pe scîndură pentru ca scîndura să luncce uniform?

1.2.120. Într-o sanie este suspendat un corp printr-un fir prins de tavan. Sania luncă liber pe un plan înclinat, unghiul de frecare cu zăpada fiind $\varphi = 5,0^\circ$. Care va fi unghiul de deviere al firului față de normala la planul înclinat?

1.2.121. La ce înălțime maximă poate urca un automobil cu motor funcționind permanent și cu toate roțile motoare, pe un plan înclinat de unghi α , acoperit cu polei avind coeficientul de frecare $\mu < \text{tg } \alpha$, dacă la baza planului viteza era v_0 ? *Aplicație:* $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 6,0^\circ$, $\varphi = 3,0^\circ$.

1.2.122. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ stă o scîndură de masă $M = 1,00$ kg, lungime $l = 1,40$ m, și coeficient de frecare la lunecare cu planul înclinat $\mu = 0,70$. Peste scîndură se pune la capătul superior un cub neted de masă $m = 0,50$ kg, cu frecare neglijabilă față de scîndură. Inițial sistemul este în repaus. Aflați timpul de lunecare a cubului peste scîndură.

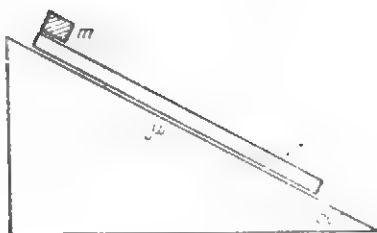


Fig. 1.2.122

1.2.123. Se consideră sistemul din figură în care se cunosc: $m_1 = 2,00$ kg, $m_2 = 6,00$ kg, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,26$. Scindura orizontală este suficient de lungă și luncă fără frecare pe planul orizontal. Forța F crește proporțional cu timpul: $F = c \cdot t$, unde $c = 2,0$ N/s; forța începe să acționeze în momentul $t = 0$. Să se reprezinte grafic accelerația scindurii în funcție de timp.

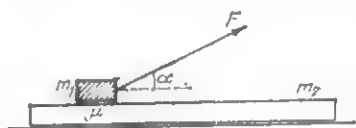


Fig. 1.2.123

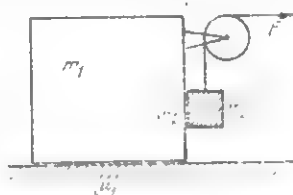


Fig. 1.2.124

1.2.124. Se consideră sistemul din figură în care $m_1 = 2,00$ kg $m_2 = 1,00$ kg și coeficienții de frecare $\mu_1 = 0,20$, $\mu_2 = 0,10$. Scripetele este ideal și corpul m_1 nu se răstoarnă. Pentru diferite valori ale forței F sistemul pornește din repaus. Reprezentați grafic accelerația $a_1 = f(F)$.

1.2.125. Peste un scripete ideal este trecut un fir ideal având la un capăt un corp de masă $m_1 = 2,00$ kg, iar de-a lungul celuiălalt capăt luncă cu frecare un inel de masă $m_2 = 3,00$ kg cu accelerația relativă $w = 9,8$ m/s² față de fir, orientată în jos. Aflați forța de frecare dintre inel și fir și accelerațiile corpurilor față de Pământ. Care va fi tensiunea din firul de suspensie a scripetelui?

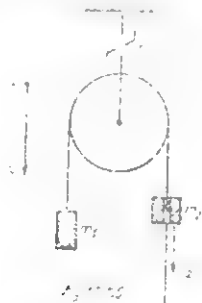


Fig. 1.2.125

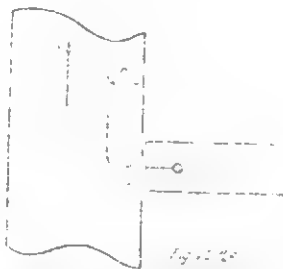
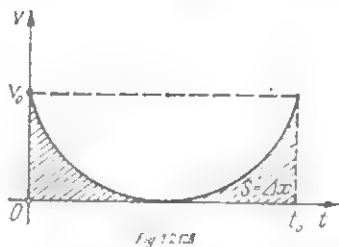
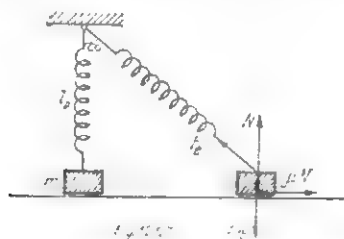


Fig. 1.2.126

1.2.126. Un automat împinge piesele cu viteza $v_0 = 1,00$ m/s transversal peste o bandă rulantă care merge cu viteza $v = 2,00$ m/s. Piesele se opresc la distanța d_1 de marginea benzii, ca în figură. Ce viteză trebuie să aibă banda pentru ca piesele să se oprească la distanța $d_2 = nd_1$, $n = 1,50$, de marginea benzii?

1.2.127. Un corp de masă $m = 500$ g așezat pe un plan orizontal este fixat de capătul inferior al unui resort vertical de constantă elastică $k = 10,0$ N/m, capătul superior fiind prins de tavan la înălțimea $l_0 = 10$ cm cînd resortul este nedeformat. Trăgînd orizontal planul, resortul deviază în noua poziție de echilibru cu $\alpha = 60^\circ$ față de verticală. Aflați coeficientul de frecare la alunecare.



**** 1.2.128.** Viteza unui corp variază după graficul din figură care reprezintă o jumătate de elipsă. Cunoșcînd viteza medie în această mișcare $\bar{v} = 8,6$ m/s, aflați viteza inițială v_0 a corpului.

*** 1.2.129.** Două mobile pleacă simultan din originea axei Ox și se mișcă respectiv după legea $x_1 = At + Bt^2$, $x_2 = Ct + Dt^2 + Et^3$. Aflați viteza relativă a primului mobil față de al doilea.

*** 1.2.130.** Un mobil se mișcă după legea $x = At^4 + Bt^2$, A, B — constante pozitive. Aflați viteza extremă pe care o atinge mobilul. Faceți graficul calitativ $v = v(t)$.

*** 1.2.131.** Legea vitezei unui mobil pentru intervalul de timp $t \in [0, \tau]$ este $v = At + Bt^2$, A, B — constante. Aflați viteza medie a mobilului în acest interval de timp.

*** 1.2.132.** În intervalul $t \in (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 > 0$ legea mișcării unui mobil este descrisă satisfăcător de o funcție iperbolică $x = b/t$, $b > 0$. Aflați legea vitezei și legea accelerației.

**** 1.2.133.** Accelerația unei rachete crește proporțional cu pătratul timpului: $a = At^2$. La momentul $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$ (condițiile inițiale). Aflați legea vitezei și legea mișcării.

**** 1.2.134.** O particulă pornește cu viteza inițială v_0 avînd accelerația $a = \omega^2 x$. Aflați legea vitezei și legea mișcării.

**** 1.2.135.** Cunoșcînd accelerația $a = f(t)$ și timpul pînă la oprire t_m al unui mobil, a) scrieți legea vitezei în funcție de timp și b) exprimați distanța pînă la oprire x_m printr-o singură integrală.

*** 1.2.136.** Un vehicul începe să frneze astfel încît legea mișcării înecîtinite este $x = At - Bt^3$. Știînd valoarea forței de frînare în momentul opririi F_0 , aflați legea forței de frînare.

*** 1.2.137.** Un corp începe să lungească din vîrfurile unui plan înclinat a cărui bază este b , iar coeficientul de frecare este μ . Pentru ce unghi al planului timpul de coborîre este minim și cît este acest timp?

*** 1.2.138.** Un vehicul de masă m pornește la un moment dat astfel, încît legea mișcării sale este $x = At^2 + Bt^3$. Aflați: a) timpul și distanța pînă la oprire, b) forța de tracțiune F , c) reprezentați grafic pe aceeași diagramă x, v, F .

**** 1.2.139.** Asupra unei particule de masă m acționează forța $F = F_0 \cos \omega t$. Știînd condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$ (particula pornește din repaus din originea axei Ox), deduceți legea vitezei și legea mișcării.

**** 1.2.140.** Un șlep pornește din repaus tras de o forță orizontală constantă F . El întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu: a) viteza, $F_r = -kv$, b) pătratul vitezei, $F_r = -kv^2$. Aflați legea vitezei și legea mișcării.

**** 1.2.141.** Un glonț pornește cu viteza inițială v_0 . El întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu cubul vitezei: $F_r = -kv^3$. Neglijând gravitația, aflați legea vitezei și legea mișcării.

**** 1.2.142.** Variind înclinarea unui plan inclinat s-a găsit că un corp așezat pe acest plan alunecă uniform la un unghi $\varphi = 30^\circ$. Fixînd înclinarea la un unghi $\alpha = 45^\circ$ s-a găsit că viteza limită de alunecare liberă a corpului în jos pe plan atinge valoarea $c = 4,0$ m/s, forța de rezistență a aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei corpului. Lansînd acum corpul cu viteza inițială $v_0 = 2,0$ m/s în sus de-a lungul planului inclinat (cu $\alpha = 45^\circ$), aflați cu ce viteză se întoarce corpul înapoi la baza planului.

(*) 1.2.143. Un punct material execută oscilații foarte mici pe o curbă netedă (fără frecări) situată în planul vertical, în jurul minimului curbei, sub acțiunea greutății. Aflați perioada micilor oscilații, știind raza de curbură a curbei în punctul de minim R_0 .

**** 1.2.144.** O barcă de masă m întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporționalitate k . După cît timp viteza inițială v_0 a bărcii se micșorează de n ori?

**** 1.2.145.** O barcă cu motor întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 10$ m/s motorul este oprit și după un timp $\tau = 17,2$ s viteza bărcii devine de e ori mai mică (e — baza logaritmilor naturali). Calculați distanța parcursă de barcă în acest timp.

**** 1.2.146.** O barcă de masă $m = 100$ kg întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu viteza. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 1,00$ m/s motorul este oprit și după un timp $\tau = 10$ s viteza bărcii se micșorează de e ori (e — baza logaritmilor naturali). Aflați: a) coeficientul de proporționalitate din legea forței de rezistență, b) distanța parcursă în timpul indicat, c) distanța parcursă pînă la oprire.

**** 1.2.147.** O particulă cade liber în aer fără viteză inițială. Ea întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Aflați după cît timp particula atinge $f = 99\%$ din viteza sa limită de cădere liberă, care este $c = 4,9$ cm/s.

**** 1.2.148.** O particulă cade în aer fără viteză inițială și întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Știind viteza limită de cădere liberă c , exprimați viteza și coordonata particulei în funcție de timp.

**** 1.2.149.** Un corp cade în aer fără viteză inițială și întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Știind viteza limită de cădere liberă c , exprimați: a) legea vitezei, b) legea mișcării, c) coordonata în funcție de viteză.

**** 1.2.150.** Un corp este aruncat vertical în sus în aer cu viteza inițială v_0 . Corpul întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c , aflați: a) timpul de urcare t_m și înălțimea maximă h_m la care urcă corpul, b) timpul de coborire t' și viteza v' cu care corpul ajunge înapoi pe Pămînt.

**** 1.2.151.** Un corp de masă m este tras orizontal de o forță F orientată sub unghiul α față de orizontală. Coeficientul de frecare la alunecare este μ și forța de rezistență din partea aerului $F_r = -kv$. Aflați: a) viteza limită, maximă posibilă, b) legea mișcării (viteza inițială este nulă).

**** 1.2.152.** O sanie de masă m și de lungime l intră cu viteza v_0 pe un drum asfaltat cu coeficientul de frecare la lunecare μ . Aflați distanța parcursă de sanie până la oprire și timpul până la oprire.

**** 1.2.153.** Un glonț intră cu viteza $v_0 = 600$ m/s într-un perete de grosime $h = 40$ cm și iese cu viteza $v' = 150$ m/s. Considerind forța de rezistență proporțională cu cubul vitezei, aflați timpul de traversare a peretelui.

**** 1.2.154.** Peste un cilindru orizontal fix este trecut un fir (ideal) astfel încât unghiul la centru al porțiunii înfășurate este α , iar coeficientul de frecare la lunecare dintre fir și cilindru este μ . a) Aflați tensiunea din fir în momentul lunecării firului în funcție de unghiul la centru θ și tensiunea T_0 cu care se trage de un capăt. b) Care este raportul tensiunilor de la capete T_0/T' în momentul lunecării? c) Considerind că $\theta = (2n + 1)\pi$ și că la capetele firului atârnă două corpuri de mase $m_{1,2}$, aflați condiția de lunecare a firului și accelerația cu care se vor mișca în acest caz corpurile.

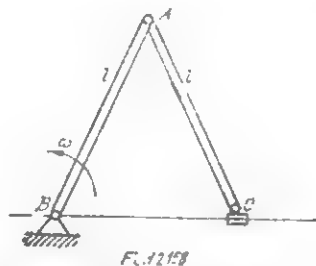
**** 1.2.155.** O rachetă în cosmos pornește din repaus, are masa inițială m_0 și expulzează continuu gazele de ardere în direcția mișcării cu viteza relativă v_{rel} constantă față de rachetă. Aflați viteza rachetei în funcție de masa ei.

**** 1.2.156.** Fie o rachetă lansată de pe Pământ. Considerind viteza relativă v_{rel} de ejectare a gazelor constantă și neglijând frecarea cu aerul și variația accelerației gravitaționale g , aflați viteza rachetei și condiția de desprindere de Pământ.

**** 1.2.157.** O navă cosmică cu masa m_0 se mișcă cu viteza $v_0 = \text{const}$ în absența forțelor exterioare. Pentru a-i modifica direcția de mișcare se acționează un motor cu reacție care ejectează gazele cu viteza relativă $v_{rel} = \text{const}$ față de navă și perpendiculară pe viteza navei. a) Aflați unghiul de deviere θ a direcției navei în funcție de masa navei. b) Cum trebuie să scadă masa navei pentru a putea descrie un cerc de rază R ?

— Mișcarea circulară

1.2.158. În mecanismul din figură bara AB de lungime $l = 1,00$ m se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega = 5,0$ rad/s. În A este o articulație, iar capătul C culisează pe tija BC . Aflați viteza și accelerația maximă a capătului C .



1.2.159. Globul terestru are perioada de rotație proprie $T = 23$ h 56 min 4 s. De ce atunci ceasornicele noastre sînt prevăzute pentru 24 h - durată a unei zile și nopți?

1.2.160. Planeta Venus se rotește în jurul axei sale cu perioada $T_1 = 243$ zile terestre (față de stele) în sens opus revoluției în jurul Soarelui care are perioada $T_2 = 225$ zile terestre. Aflați durata unei zile și nopți venusiene.

1.2.161. Cum vede un observator aflat la Polul Nord mișcarea diurnă aparentă a Soarelui pe bolta cerească? În particular, în zilele de solstițiu și echinocțiu? (Axa polilor Pământului este înclinată cu $23^\circ 30'$ față de normala la planul revoluției Pământului în jurul Soarelui).

1.2.162. Cum vede un observator aflat la Cercul Polar mișcarea diurnă aparentă a Soarelui pe bolta cerească în zilele de echinocțiu și solstițiu? (Axa polilor Pământului este înclinată cu $23^\circ 30'$ față de normala la planul revoluției Pământului în jurul Soarelui).

1.2.163. Direcția firului cu Plumb nu trece prin centrul Pământului din cauza rotației Pământului. Evaluați distanța maximă posibilă dintre centrul Pământului și dreapta suport a firului cu plumb. Raza Pământului $R = 6400$ km.

1.2.164. Un aviator, zburind la altitudinea $h = 10$ km vede exact Soarele răsărind. După cât timp un observator aflat pe Pământ sub avion va vedea Soarele răsărind? Raza Pământului $R = 6400$ km.

1.2.165. O planetă are perioada rotației proprii $T_0 = 24$ h, iar perioada de revoluție în jurul stelei $T = 1,00$ an. Satelitul planetei are perioada de revoluție în jurul planetei $T' = 28$ zile. Considerind că toate corpurile se rotesc în același plan, aflați a) perioada de repetiție a eclipsei satelitului, observată de pe planetă b). Dar observată dintr-un anumit loc al planetei?



1.2.166. De un stîlp vertical cu secțiune pătrată de latură $b = 20$ cm este legat un fir orizontal de lungime $l = 1,90$ m cu o bilă la capăt, așezată pe planul orizontal fără frecări cu $\alpha = 30^\circ$ ca în figură. I se imprimă bilei o viteză $v = 10,0$ m/s orizontal și perpendicular pe fir. După cât timp firul se va înfășura pe stîlp?

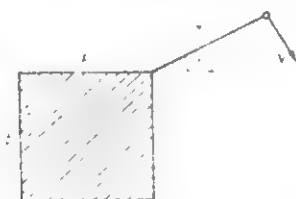


Fig. 12.166



Fig. 12.167

1.2.167. Roțile motoare de rază $r = 20$ cm ale unui tractor cu șenile se mișcă în același sens cu vitezele unghiulare $\omega_1 = 6,0$ rad/s, $\omega_2 = 8,0$ rad/s. Lățimea tractorului este $l = 1,60$ m. Aflați raza cercului pe care se mișcă centrul tractorului și viteza unghiulară a acestei mișcări.

(*) 1.2.168. Un elev învîrte o piatră cu turația $n = 1,00$ rot/s în planul vertical, pe un fir de lungime $l = 1,00$ m. Ce unghi cu horizontala trebuie să formeze firul astfel încît lăsîndu-l liber piatra să urce la înălțimea maximă?

1.2.169. Un camion virează spre stînga pe un teren orizontal. La care din roți, stînga sau dreapta, forța de frecare dintre anvelope și teren este mai mare?

1.2.170. Cu ce turație minimă trebuie rotit un cilindru de rază $R = 2,0$ m în jurul axei sale verticale pentru ca un om sprijinit de peretele interior al cilindrului să nu lunece în jos? Coeficientul de frecare $\mu > 0,20$.

1.2.171. În sistemul din figură se dau $m = 5,0$ kg, $M = 9,8$ kg, $R = 0,50$ m, $\mu = 0,40$, frecarea între căruciorul M și disc este neglijabilă. Aflați viteza unghiulară ω pentru care căruciorul lunecă.

1.2.172. Un biciclist face un viraj pe un drum orizontal de rază $R = 19,6$ m. Coeficientul de frecare între anvelope și asfalt este $\mu = 0,32$. Aflați viteza maximă pe care o poate avea.

1.2.173. Un camion se mișcă pe un pod convex de rază $R = 45$ m. Ce accelerație tangențială maximă poate dezvolta în virful podului dacă are viteza $v = 54$ km/h, iar coeficientul de frecare anvelope-asfalt este $\mu = 0,50$? Dar pe un pod concav?

1.2.174. Un camion poate dezvolta o forță de tracțiune maximă $F_{\max} = 15$ kN pe un drum orizontal. Ce forță de tracțiune maximă poate dezvolta camionul dacă merge cu viteza $v = 72$ km/h pe un pod convex, respectiv concav, cu raza $R = 40$ m?

1.2.175. Cu ce viteză constantă (în modul) maximă se poate mișca un camion pe un pod convex de rază $R = 90$ m și de lungime $l = 31,4$ m, dacă coeficientul de frecare între anvelope și șosea este $\mu = 0,20$?

1.2.176. Un motociclist descrie un cerc orizontal de rază $R = 100$ m cu viteza $v = 36$ km/h pe suprafața exterioară a unui con circular (cu virful în sus) cu deschiderea $2\alpha = 150^\circ$. Care trebuie să fie coeficientul de frecare pentru ca motociclistul să nu lunece?

1.2.177. La un viraj de rază $R = 70,7$ m șoseaua este înclinată (adică partea opusă „supraînălțată”) cu unghiul $\alpha = 20^\circ$. Din cauza poleiului unghiul de frecare dintre anvelope și polei a devenit mai mic decît unghiul de înclinare α , iar viteza maximă posibilă a unui camion, pentru a nu derapa la viraj (nu există pericol de răsturnare), a devenit $v_{\max} = 72$ km/h. Care este unghiul de frecare pe polei și care va fi viteza minimă posibilă a camionului?

1.2.178. De cîte ori crește viteza maximă posibilă la viraj a unui motociclist pe o șosea cu supraînălțare de unghi $\beta = 6,0^\circ$ în comparație cu viteza maximă posibilă pe șosea orizontală, la aceeași rază de viraj și același coeficient de frecare $\mu = 0,40$?

1.2.179. O sferă de rază $R = 39,2$ cm se rotește o dată cu viteza unghiulară $\omega_1 = 4,0$ rad/s, apoi cu $\omega_2 = 7,1$ rad/s, în jurul diametrului său vertical. În interiorul sferei sînt presărate mai multe fire de nisip. Considerînd frecările foarte mici, unde vor sta firele de nisip?

1.2.180. Firul de suspensie de lungime $l = 1,00$ m al unui pendul simplu gravitațional descrie pinza unui con cu frecvența de rotație $\omega = 4,0$ rad/s (pendul conic). Aflați raza cercului descris de bilă.

1.2.181. Un pendul conic aflat într-un lift în repaus are perioada $T_1 = 1,00$ s și unghiul firului cu verticala $\alpha_1 = 45^\circ$. Cît devine perioada dacă liftul coboară cu accelerația $a = 4,9$ m/s² și unghiul de deviere devine $\alpha_2 = 60^\circ$?

1.2.182. Un cărucior avînd viteza $v = 1,00$ m/s cade într-o prăpastie de adîncime $h = 19,6$ m. Evaluați cîte rotații face căruciorul în timpul căderii.

1.2.183. În spațiul cosmic departe de alte corpuri se află o sferă sferică de masă $M = 900$ kg în interiorul căreia de-a lungul ecuatorului se rotește uniform o bilă de masă $m = 100$ kg cu perioada $T = 3,00$ s. Distanța dintre centrele corpurilor este $d = 10,0$ m. Aflați forța cu care bila apasă asupra sferei.

1.2.184. O bilă de rază $r = 4,0$ cm, suspendată de un fir de lungime $l = 96$ cm, se sprijină pe un cilindru de rază $R = 56$ cm, ca în figură. La ce turație a sistemului, bila se desprinde de cilindru?

1.2.185. În camera unei roți de automobil a pătruns o pietricică. La ce viteză minimă a automobilului pietricica va participa la mișcarea roții fără să lunece? Se dau : unghiul de frecare la lunecare dintre pietricică și cauciucul camerei $\varphi = 11^\circ 32'$, raza roții $R = 49$ cm. Dacă viteza automobilului scade, în ce punct de pe periferia roții va începe lunecarea pietricicelei? Dați unghiul razei vectoare cu horizontala.

1.2.186. Două perechi de bile de mase $m = 410$ g, respectiv $M = 2,00$ kg, sînt fixate în colțurile unui pătrat care se poate deforma liber, masele

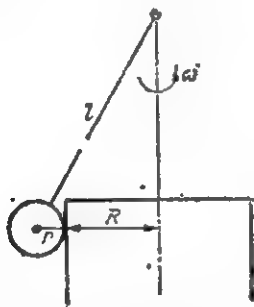


Fig. 1.2.184

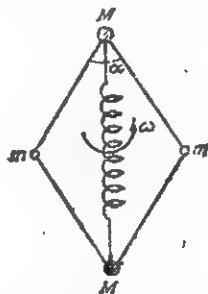


Fig. 1.2.186

M fiind legate și printr-un resort inițial nedeformat de constantă elastică $k = 8,66$ N/m. Sistemul se așează pe o masă orizontală netedă fără frecări și se pune în rotație în jurul axei verticale proprii. Pătratul devine romb cu unghiul ascuțit $\alpha = 60^\circ$, ca în figură. Aflați viteza unghiulară de rotație.

1.2.187. Pe filetul (ghiventul) dreptunghiular interior al unei piulițe cu ax vertical lunecă un mic corp. Se cunosc : raza interioară a piuliței $R = 3,0$ cm, unghiul filetului față de planul transversal al piuliței $\alpha = 15^\circ$ și unghiul de frecare dintre corp și piuliță $\varphi = 5,0^\circ$. Aflați viteza limită constantă în modul cu care va luneca corpul.

1.2.188. Aflînd că la viteze mari forța de rezistență a aerului este proporțională cu pătratul vitezei, un elev a luat o bilă de masă $m = 100$ g și legînd-o de un fir a început s-o învîrtă repede deasupra capului pe un cerc de rază $R = 1,00$ m (pumnul descriînd un cerc mai mic). A constatat atunci că raza vectoare a bilei (raza cercului R) face un unghi $\alpha = 6,0^\circ$ cu direcția firului în planul orizontal. Neglijînd forța de greutate (față de tensiunea din fir), aflați coeficientul de proporționalitate din legea forței.

1.2.189. Un automobil pornește uniform accelerat pe un arc de cerc orizontal de lungime $s = 50$ m și rază de curbură $R = 100$ m. Ce viteză

maximă finală poate atinge dacă coeficientul de frecare între anvelope și șosea este $\mu = 0,28$?

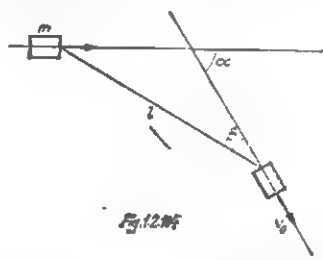
1.2.190. Un camion, pornind din repaus, face un viraj de rază $R = 100$ m, descriind un arc de cerc de unghi $\alpha = 30^\circ$. Coeficientul de frecare între anvelope și asfalt este $\mu = 0,30$. Dacă viteza sa crește uniform în modul, ce valoare maximă poate atinge?

1.2.191. Pentru a creea greutatea artificială două părți ale unei nave cosmice, de mase $m_1 = 4,0$ t, $m_2 = 8,0$ t au fost despărțite la distanța $L = 29,4$ m dintre ele și puse în rotație în jurul CM comun. Aflați perioada de rotație a sistemului, știind că un ceasornic cu pendul din cabina m_2 merge de $n = 2,00$ ori mai încet decât pe Pământ.

1.2.192. Un camion accelerind cu o accelerație maximă posibilă pe o șosea rectilinie își mărește viteza $v_0 = 20,0$ m/s cu $\Delta v = 0,5$ m/s într-un timp $\Delta t = 0,10$ s. În ce interval de timp $\Delta t'$ minim poate face el același lucru pe o șosea orizontală curbă de rază $R = 100$ m? Pentru ce rază R' nu-și poate măări viteza v_0 ?

1.2.193. Un camion de masă $m = 1000$ kg virează cu accelerația tangențială constantă $a_t = 1,00$ m/s² pe o șosea orizontală de rază $R = 100$ m, avind coeficientul de frecare $\mu = 0,30$. Ce viteză maximă dezvoltă până la apariția alunecării? Ce putere va avea motorul în acest moment?

1.2.194. O locomotivă merge cu viteza constantă $v_0 = 1,00$ m/s și trage printr-un cablu de lungime $l = 32$ m un vagon de masă $m = 9,0$ t ca în figură. Cunoscind unghiurile $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ (frecări neglijabile), aflați tensiunea din cablu în acest moment.



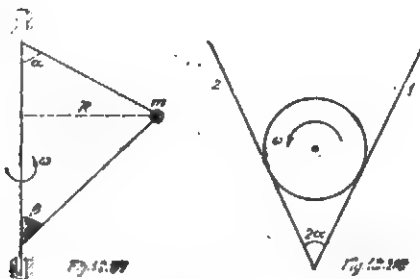
1.2.195. În anvelopa de rază R a unui automobil care merge cu viteza constantă v_0 a intrat un cui de masă m . Aflați forța de reacțiune asupra cuiului și raza de curbura a traiectoriei sale în funcție de unghiul θ format de raza vectoare cu verticala.

1.2.196. Un pahar tronconic are diametrul bazei $D = 7,0$ cm și unghiul de înclinare al pereților $\alpha = 30^\circ$ (față de verticală). La ce turatie a paharului în jurul axei sale verticale, apa (30 cm³) aflată pe fundul paharului va fi azvirlită afară?

1.2.197. Pe suprafața interioară a unei sfere de rază $R = 55$ cm poate aluneca cu frecare foarte mică o bilă de rază $r = 5,0$ cm. Care va fi poziția de echilibru relativ a bilei (unghiul dintre raza vectoare a bilei și verticala) dacă sfera se rotește cu turația $n = 1,00$ rot/s în jurul diametrului vertical?

(*) **1.2.198.** Peste suprafața exterioară a unui con cu deschiderea $2\alpha = 90^\circ$ și cu vârful în sus este așezat orizontal un lăntșor de masă $m = 314$ g și rază $R = 20$ cm cu capetele legate între ele, astfel încât el se rotește o dată cu conul cu viteza unghiulară $\omega = 9,0$ rad/s în jurul axei sale verticale. Ce tensiune va fi în lăntșor?

1.2.199. O tijă verticală are prinse la capete două fire de același fel sub unghiurile α , respectiv β , astfel încât la capătul comun este prinsă o bilă de masă m la distanța R de tijă, ca în figură. Sistemul se pune în rotație cu viteze unghiulare din ce în ce mai mari. Care din fire se rupe primul?



1.2.200. Un cilindru de masă $m = 1,00$ kg, adus în mișcare de rotație, este așezat într-un unghi diedru $2\alpha = 90^\circ$, ca în figură. Cunoșcând unghiul de frecare cu planele $\varphi = 15^\circ$, aflați forțele de apăsare asupra planelor.

1.2.201. Aflați de câte ori crește viteza maximă realizabilă fără derapare la o șosea datorită „suprainălțării” părții exterioare cu unghiul $\alpha = 6,0^\circ$, unghiul de frecare fiind $\varphi = 15^\circ$.

1.2.202. Ce viteză minimă trebuie să aibă un motociclist pentru a putea merge pe suprafața interioară a unui cilindru vertical, centrul său de masă descriind un cerc orizontal de rază $R = 10,0$ m, știind că pe o șosea orizontală, la același coeficient de frecare raza minimă de viraj la viteza $v_0 = 9,8$ m/s este $R_0 = 40$ m. Cu ce unghi față de orizontală se înclină motociclistul dacă merge cu viteza minimă cerută? Dar cu viteza $v' = 22$ m/s?

1.2.203. Două corpuri mici identice sînt legate între ele printr-un fir de lungime $l = 2,0$ cm și așezate de-a lungul unui meridian al unei sfere fixe fără frecări, de rază $R = 98$ cm, astfel încît un corp este în pol. Care va fi accelerația inițială a sistemului? Pentru ce coeficient de frecare corpurile vor rămîne în repaus?

1.2.204. La un viraj de rază $R = 100$ m, efectuat cu viteza inițială $v_0 = 10,0$ m/s, un camion frinează cu accelerația tangențială constantă maximă astfel ca să nu derapeze și parcurge distanța $s = 30$ m pînă la oprire. Aflați coeficientul de frecare.

1.2.205. Un cilindru se rostogolește cu accelerația orizontală $a = 4,9$ m/s² a centrului de masă. Pe suprafața sa interioară alunecă un mic corp astfel încît raza sa vectorie face un unghi $\alpha = 45^\circ$ cu orizontala. Aflați coeficientul de frecare.

1.2.206. Un acrobat de masă $m = 60$ kg merge uniform pe un cilindru, în timp ce cilindrul se rostogolește uniform în sens opus fără să lunece. Unghiul maxim față de verticală format de raza vectorie spre punctul unde calcă acrobatul este $\theta = 30^\circ$. Aflați unghiul de frecare și forța de frecare în acest caz.

1.2.207. O bilă de masă $m_1 = 100$ g suspendată de un fir este menținută în repaus în poziție deviată cu $\alpha = 60^\circ$ a firului față de verticală. De bila m_1 este suspendată printr-un alt fir o altă bilă de masă $m_2 = 200$ g. Aflați accelerația bilei 2 imediat ce i se dă drumul bilei m_1 .

**** 1.2.208.** Accelerația normală a unui mobil care se mișcă pe un cerc de rază R variază după legea $a_n = A + Bt + Ct^2$. Deduceți legea accelerației tangențiale și legea spațiului.

*** 1.2.209.** Un mobil se mișcă pe o traiectorie circulară după legea $s = ct^3$, unde $c = 0,10 \text{ m/s}^3$. Aflați accelerația tangențială în momentul cînd viteza este $v = 30 \text{ m/s}$.

*** 1.2.210.** Într-o mișcare circulară $\theta = bt - ct^3$, unde b, c sînt constante pozitive. Calculați viteza unghiulară medie și accelerația unghiulară medie pe durata mișcării, de la pornire pînă la oprire.

**** 1.2.211.** Accelerația unghiulară a unei particule în mișcare circulară este $\varepsilon = \frac{b}{(t + c)^2}$. Aflați tangenta unghiului dintre accelerație și viteză.

*** 1.2.212.** O bandă de magnetofon de grosime h se înfășoară cu viteză constantă v_0 pe o bobină de rază inițială R_0 . Aflați: a) viteza cu care crește raza bobinei, b) accelerația unghiulară a bobinei.

(*) 1.2.213. În timpul oscilațiilor unui pendul simplu gravitațional accelerația maximă a bilei este de n ori mai mare decît accelerația minimă a bilei. Aflați amplitudinea unghiulară a oscilațiilor. Ce valori poate lua n ?

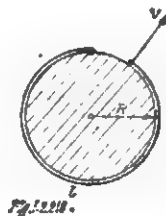
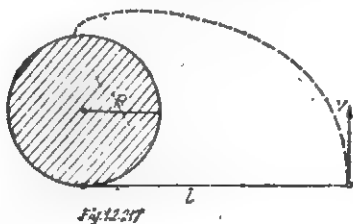
**** 1.2.214.** O roată se rotește astfel încît accelerația sa unghiulară variază după legea $\varepsilon = A - B\omega$. Știind că la momentul inițial $t = 0$, $\omega = \omega_0$, aflați legea de variație a vitezei unghiulare. Care este viteza unghiulară staționară și în cît timp se atinge?

*** 1.2.215.** O particulă se mișcă pe un cerc de rază R după legea $s = A \sin(\omega t + \alpha)$, s — lungimea arcului de cerc. Aflați valorile extreme ale accelerației.

**** 1.2.216.** Un mobil se mișcă pe un cerc de rază R astfel, încît unghiul α dintre viteză și accelerație este constant. Exprimați viteza în funcție de timp, viteza inițială fiind v_0 .

**** 1.2.217.** De un stîlp cilindric vertical de rază R este prins un fir de lungime l (în planul orizontal) avînd la capăt o bilă. I se imprimă bilei o viteză orizontală v perpendicular pe fir. Neglijînd frecările, aflați după cît timp se înfășoară o fracțiune f din lungimea firului.

**** 1.2.218.** Pe un stîlp cilindric vertical de rază $R = 10,0 \text{ cm}$ este înfășurat un fir de lungime $l = 68,6 \text{ cm}$, avînd la capăt o bilă. I se imprimă bilei o viteză radială $v = 3,43 \text{ m/s}$. În cît timp firul se va înfășura din nou pe stîlp? Frecările sînt neglijabile.



**** 1.2.219.** Într-un jgheab curbat sub formă de circumferință orizontală de rază $R \gg r$, (r — raza jgheabului) lunecă un mic corp cu coeficientul de frecare μ și viteza inițială v_0 . Aflați: a) coordonata curbilinie s în funcție de viteză, b) viteza inițială necesară pentru ca acest corp să înconjoare complet circumferința.

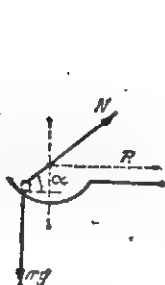


Fig. 12.220



Fig. 12.221

- * 1.2.220. Un pendul simplu gravitațional de lungime l și masă m oscilează după legea $\theta = A \sin(\omega t + \alpha)$. Calculați tensiunea din fir.
- (*) 1.2.221. Un lăntișor de masă $m = 100 \text{ g}$ și lungime $l = 1,00 \text{ m}$, cu capetele împreunate, înfășoară periferia unui disc orizontal care se rotește uniform în jurul axei sale verticale și antrenează prin frecare lăntișorul. La ce viteză a discului lăntișorul se va rupe, dacă tensiunea sa de rupere este $T_r = 1,00 \text{ kN}$?

— Forțe elastice

1.2.222. Ce înălțime maximă poate avea un zid de cărămidă dacă limita de rezistență a cărămidzilor la comprimare este $\sigma_r = 6,0 \text{ MN/m}^2$, iar coeficientul de siguranță este $s = 5,0$? Greutatea specifică a cărămidzilor $\gamma = 20,0 \text{ kN/m}^3$.

1.2.223. Două sîrme de dimensiuni identice dar din materiale diferite, sînt sudate o dată în serie și apoi în paralel și supuse la o forță de tracțiune. Calculîndu-se apoi modulele de elasticitate ca și cum ar fi din același material s-au găsit, bineînțeles, valori diferite: $E' = 96 \text{ GPa}$, $E'' = 100 \text{ GPa}$. Aflați modulele $E_{1,2}$ pentru fiecare sîrmă.

1.2.224. Au fost confecționate baloane de sticlă de diferite raze și de aceeași grosime a pereților. Baloanele sînt supuse unui test de rezistență la presiune. a) Care din baloane se sparge mai întîi? b) Cum trebuie să fie grosimea pereților față de raza balonului pentru ca toate baloanele să reziste la aceeași presiune?

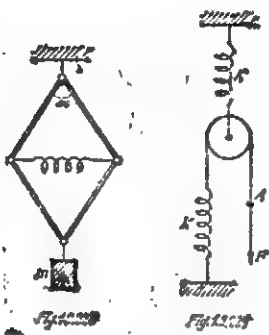
(**) 1.2.225. Un resort greu de constantă elastică k este așezat pe un plan orizontal fără frecări și tras la capete de forțele orizontale $F_{1,2}$. Aflați alungirea resortului.

(**) 1.2.226. Un dinamometru este așezat orizontal pe un plan orizontal fără frecări. Resortul are masa m , iar corpul cilindric al dinamometrului în care se află resortul are masa M . De capătul liber al resortului se trage cu o forță orizontală F_1 , iar de corpul dinamometrului se trage cu o forță F_2 în sens opus. Ce forță F indică dinamometrul?

1.2.227. Un corp de masă $m = 10,0 \text{ g}$ este suspendat de un fir elastic de constantă $k = 10,0 \text{ N/m}$. Cu cît trebuie ridicat corpul de la poziția sa de echilibru pentru ca lăsat apoi liber să rupă firul a cărui tensiune de rupere este $T_r = 0,40 \text{ N}$? ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

1.2.228. În sistemul din figură barele au masă neglijabilă și articulațiile sînt ideale. Inițial barele formează un pătrat, resortul fiind nedeformat.

mat și de lungime $l_0 = 9,8$ cm. De capătul inferior se agată un corp de masă $m = 0,50$ kg și unghiul superior devine $\alpha = 60^\circ$. Aflați constanta elastică a resortului.



1.2.229. În sistemul din figură se cunosc $k = 100$ N/m și $F = 10,0$ N, resortul și scripetele fiind ideale. Cu cât coboară punctul A?

1.2.230. Pe un disc orizontal care se poate roti în jurul axei sale verticale se află un mic corp de masă $m = 100$ g prins printr-un resort de centrul discului. Dacă turația discului este cel mult $n_1 = 2,0$ rot/s, resortul rămâne nedeformat. Dacă turația crește foarte lent până la $n_2 = 5,0$ rot/s, resortul se alungește cu o fracțiune $f = 1,0$ din lungimea sa nedeformată. Aflați constanta elastică a resortului.

(*) **1.2.231.** Pe un cilindru de rază $R = 20,0$ cm se îmbracă un inel de cauciuc întins uniform, de masă $m = 200$ g și constantă elastică $k = 100$ N/m, avind în stare nedeformată lungimea $l_0 = 62,8$ cm. Cilindrul este pus în mișcare de rotație cu accelerația unghiulară constantă $\varepsilon = 1,00$ rad/s². După cât timp inelul de cauciuc va începe să lunece față de cilindru, dacă coeficientul de frecare la lunecare este $\mu = 0,40$? (Se neglijează gravitația).

1.2.232. În punctul superior al unui plan cu înclinația $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală, este prins un capăt al unui resort ideal, cu lungimea nedeformată $l = 9,8$ cm și constantă elastică $k = 30$ N/m. De celălalt capăt al resortului este prinsă o bilă de masă $m = 100$ g și de dimensiuni neglijabile, sprijinindu-se de plan fără frecare. Se imprimă sistemului o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\omega = 15$ rad/s în jurul unei axe verticale care trece prin punctul superior al planului înclinat. Aflați alungirea resortului. Ce viteză unghiulară maximă se poate imprima sistemului?

** **1.2.233.** O tijă omogenă și uniformă de masă m și lungime l se rotește cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale trecind printr-un capăt al tijei. Care va fi tensiunea $T(x)$ în tijă în secțiunea depărtată cu x de axa de rotație? Care este reacțiunea articulației?

1.2.234. Un pendul conic are firul de suspensie format dintr-un fir de cauciuc elastic de lungime nedeformată $l_0 = 60$ cm și constantă elastică $k = 9,8$ N/m. Bila are masa $m = 310$ g. Ce viteză unghiulară are pendulul dacă firul a deviat cu unghiul $\alpha = 60^\circ$?

(*) **1.2.235.** Un fir elastic de lungime $l_0 = 1,00$ m, masă $m = 0,100$ kg și constantă elastică $k = 2,00$ N/m este închis sub formă de inel și pus în mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\omega = 20$ rad/s într-un plan orizontal fără frecări. Aflați raza inelului.

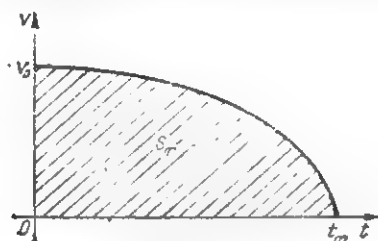
**** 1.2.236.** Demonstrați formula generalizată a lui Galilei pentru mișcarea curbilinie oarecare :

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a_t ds = v_0^2 + 2\bar{a}_t(s - s_0),$$

unde \bar{a}_t este accelerația tangențială medie pe distanța (s_0, s) . Aplicați formula la oscilatorul armonic (de masă m și constantă elastică k).

**** 1.2.237.** Un corp se mișcă pe o traiectorie curbilinie după legea $s = b^*v^n - c^n$, b, c, n — constante pozitive, la momentul inițial $t = 0$ coordonata inițială fiind $s_0 = 0$. Deduceți legea vitezei în funcție de timp.

**** 1.2.238.** Într-o mișcare încetinită diagrama vitezei în funcție de timp este reprezentată printr-un sfert de elipsă din primul cadran. Viteza inițială este $v_0 = 10$ m/s, iar timpul pînă la oprire $t_m = 40$ s. Calculați distanța s parcursă pînă la oprire. Deduceți legea mișcării.



**** 1.2.239.** Viteza de curgere a unui riu variază cu distanța de la țărm după legea $v = k\sqrt{y}$, $k = \text{const}$, pînă la mijlocul rîului, după care variază invers, simetric, pînă la celălalt mal. Lățimea rîului este b . O barcă pornește de pe țărm cu viteza v_0 constantă : a) orientată permanent perpendicular pe țărm, aflați cu cît o duce la vale apa cînd ajunge la celălalt țărm ; b) orientată astfel încît să înainteze exact perpendicular pe țărm ($v_0 > v_{\text{max}}$ a rîului), aflați în cît timp barca traversează rîul. c) Care este semnificația constantei k ?

*** 1.2.240.** O particulă descrie o curbă plană astfel încît dreapta suport a accelerației trece printr-un punct fix O . Arătați că accelerația se poate exprima astfel :

$$a = v \frac{dv}{dr}, \quad v \neq \text{const},$$

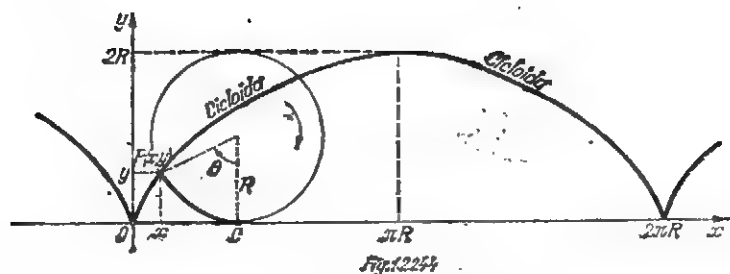
unde r este distanța pînă la punctul fix.

(*) 1.2.241. Un punct material se mișcă într-un plan (Oxy) după legea : $x = bt$, $y = ct - ht^2$, unde b, c, h sînt constante. Aflați unghiul dintre vectorii viteză și accelerație în funcție de timp.

**** 1.2.242.** Un elicopter urcă cu viteza $v_y = v_0 = \text{const}$, dar în același timp suflă vînt orizontal a cărui viteză crește cu înălțimea : $v_x = A\sqrt{y}$. Deduceți legile mișcării și ecuația traiectoriei.

*** 1.2.243.** Ecuațiile cinematice ale mișcării unui mobil sînt $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$, A, B, ω — constante pozitive. Aflați : a) ecuația implicită a traiectoriei, b) viteza $v(x, y)$, c) accelerația $a(x, y)$ și accelerațiile tangențială a_t și normală a_n , d) raza de curbură a traiectoriei $R(x, y)$.

**** 1.2.244.** Un cerc de rază R se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă Ox . a) Stabiliți ecuațiile parametriche ale traiectoriei unui punct de pe cerc în funcție de unghiul θ al razei sale vectoriale cu verticala. Această



traietorie se numește *cicloidă*. b) Un mobil se mișcă cu viteză constantă v pe cicloidă. Calculați proiecția a_y a accelerației sale pe axa Oy . c) Calculați lungimea unei bucle de cicloidă.

* 1.2.245. Un lanț (sau fir greu omogen) suspendat de capetele sale la sub acțiunea greutății forma unei curbe numită „lănțișor” de ecuație

$$y = \frac{b}{2}(e^{x/b} + e^{-x/b}) = b \operatorname{ch} \frac{x}{b}, \quad b = \text{const},$$

care reprezintă așa-numitul *cosinus hiperbolic* (*ch*).

Un mobil se deplasează uniform pe lanț cu viteza constantă v . Calculați accelerația și raza de curbura a lănișorului în funcție de coordonatele (x, y) ale mobilului.

(*) 1.2.246. Un mobil descrie o traiectorie plană astfel, încît $c_x = v_{0x} = \text{const}$. Arătați că atunci accelerația se scrie $a = \frac{v^3}{Rc_{0x}}$, unde R este raza de curbura a traiectoriei.

* 1.2.247. Arătați că în cazul unei mișcări plane viteza pe traiectorie v a mobilului se scrie: $v = R\dot{\theta}$, unde R este raza de curbura a traiectoriei, iar θ unghiul dintre viteză (sau tangenta la traiectorie) și o axă fixă (de ex. Ox) din planul mișcării.

** 1.2.248. Un mobil se mișcă în plan astfel încît unghiul α dintre viteză și accelerație este constant. Arătați că viteza pe traiectorie v a mobilului se scrie

$$v = r_0 e^{(\theta - \theta_0) \operatorname{ctg} \alpha},$$

unde θ este unghiul dintre viteză (sau tangenta la traiectorie) și o axă din plan (de ex. Ox).

* 1.2.249. Ecuațiile mișcării unui mobil sînt următoarele: $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, $z = ct$, unde r, ω, c sînt constante pozitive. Aflați: a) traiectoria, b) viteza, c) accelerația, d) raza de curbura.

* 1.2.250. Arătați că la mișcarea liberă a unei particule în aer, oricare ar fi forța de rezistență a aerului, avem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{g}{v_x^2},$$

unde $v_x = \dot{x}$ este componenta vitezei pe axa orizontală.

** 1.2.251. O particulă este aruncată în aer cu viteza inițială v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Forța de rezistență din partea aerului este proporțională cu viteza. Cunoscînd viteza limită c de cădere liberă, calculați: a) componentele vitezei v_x, v_y în funcție de timp, b) coordonatele x, y în funcție de timp, c) timpul de urcare t_m pînă la înălțimea maximă, d) coordonatele înălțimii maxime, e) ecuația explicită a traiectoriei și asimptotei, f) obțineți cazul particular al aruncării în vid.

* 1.2.252. Calculați intensitatea câmpului gravitațional al unui inel subțire de masă m și rază R la o distanță y de centrul inelului pe axa acestuia. La ce distanță câmpul este maxim și ce valoare are?

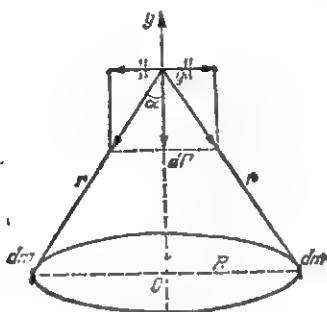


Fig. 12.252

1.2.253. La ce altitudine deasupra unui Pol greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator dacă accelerațiile gravitaționale sînt:

$g_p = 9,83 \text{ m/s}^2$, $g_E = 9,78 \text{ m/s}^2$, iar raza Pămîntului $R = 6370 \text{ km}$?

1.2.254. La ce altitudine deasupra unui Pol greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator pentru o planetă sferică de rază $R = 6400 \text{ km}$, densitate $\rho = 5,5 \text{ g/cm}^3$ și perioada de rotație $T = 24 \text{ h}$? (Constantă gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$.)

1.2.255. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6370 \text{ km}$, accelerații gravitațională $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ și constanta gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$, aflați densitatea medie a Pămîntului.

1.2.256. La ecuatorul unei Planete corpurile cîntăresc de $n = 3,0$ ori mai puțin decît la Poli. Perioada rotației proprii $T = 2\text{h } 17 \text{ min}$. Aflați densitatea medie a Planetei ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$).

1.2.257. Cunoscînd prima viteză cosmică v_1 aflați viteza unui satelit pe o orbită circulară de rază $r = nR$.

1.2.258. Pe o orbită circulară de rază $r = 6500 \text{ km}$ în jurul unei planete de masă $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ zboară un satelit. Aflați perioada ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$).

1.2.259. Aflați perioada minimă de revoluție a unui satelit în jurul unei stele neutronice de densitate $\rho = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Se dă constanta gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$.

1.2.260. Știînd durata unui an T , diametrul unghiular al Soarelui $\alpha = 32'$ și constanta gravitațională γ , aflați densitatea materiei solare.

1.2.261. Un satelit artificial al Pămîntului este lansat pe o orbită circulară în planul ecuatorului în sensul de rotație al Pămîntului cu raza orbitei $r = 3R$, (R — raza Pămîntului). După cît timp satelitul revine prima dată deasupra punctului de lansare?

1.2.262. Un satelit artificial este lansat în planul ecuatorial în sensul rotației Pămîntului. Aflați raportul dintre raza orbitei și raza Pămîntului pentru care satelitul va reveni periodic deasupra locului de lansare la interval de n zile. Pentru ce valoare n satelitul va fi geostațional?

1.2.263 Perioadele a doi sateliți pe orbite circulare din același plan sînt în raportul $T_2/T_1 = 2,0$. La momentul $t = 0$ distanța dintre sateliți este minimă. În ce raport crește distanța dintre ei la $t = T_1$?

1.2.264. Două stele de mase $m_1 = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = 0,99 \cdot 10^3$ kg se rotesc având distanța $R = 5,9 \cdot 10^9$ km între ele. Aflați viteza unghiulară și vitezele lor ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N. m²/kg²).

1.2.265. Calculați prima viteză cosmică pentru Jupiter, știind că satelitul Hanimede se rotește pe o orbită de rază $r = 1,0 \cdot 10^6$ km cu perioada $T = 7,15 \cdot 24$ h. Raza planetei Jupiter $R_J = 70 \cdot 10^3$ km.

1.2.266. Aflați accelerația gravitațională de cădere liberă la suprafața Soarelui, cunoscând durata anului $T = 1,0$ ani, distanța Pământ-Soare $R = 149,5 \cdot 10^6$ km și unghiul $\alpha = 32'$ sub care se vede de pe Pământ discul solar.

1.2.267. Care este perioada a unui satelit artificial lansat la altitudine mică pe o planetă sferică omogenă de densitate $\rho = 5\,500$ kg/m³? ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N. m²/kg²).

1.2.268. Calculați perioada de revoluție a Lunii în jurul Pământului cunoscând accelerația terestră a căderii libere $g_0 = 9,8$ m/s², raza Pământului $R_0 = 6400$ km și distanța Pământ-Lună $R = 384000$ km.

1.2.269. Calculați masa Soarelui cunoscând perioada de revoluție a Pământului în jurul Soarelui $T = 1,00$ ani, distanța Pământ-Soare $R = 149,5 \cdot 10^6$ km și constanta gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N. m²/kg².

1.2.270. Un cosmonaut cu masa $m = 100$ kg se află în afara navei de masă $M = 5,0$ t, legat de navă printr-un cablu de lungime $l = 64$ m. Nava se mișcă pe o orbită circulară în jurul Pământului la altitudinea $h = 600$ km. Care este tensiunea din cablu dacă cosmonautul este mereu de partea opusă Pământului? (Raza Pământului $R = 6400$ km).

1.2.271. Un satelit este lansat de la un pol cu o viteză orizontală. După $\tau = 3$ h 20 min satelitul atinge altitudinea maximă față de Pământ. Aflați această altitudine.

* **1.2.272.** Luna se depărtează de Pământ cu viteza radială $v_r = 3,3$ cm/an. Aflați accelerația unghiulară a Lunii știind distanța Pământ-Lună $R = 384 \cdot 10^3$ km și viteza unghiulară a Lunii $\omega = 2,56 \cdot 10^{-6}$ rad/s.

** **1.2.273.** Fie un fragment de cerc de butoi, de masă m , de unghi la centru α și de rază de curbura R . Calculați intensitatea câmpului gravitațional în centrul de curbura.

** **1.2.274.** Calculați intensitatea câmpului gravitațional al unui disc subțire, omogen și uniform, de masă m și rază R , pe axa de simetrie a acestuia. Deduceți apoi intensitatea câmpului gravitațional al unui plan infinit, de densitate superficială σ .

** **1.2.275.** Calculați intensitatea câmpului gravitațional al unui fir rectiliniu de lungime l și masă m , la distanța r de fir pe mediatoarea acestuia. Deduceți apoi câmpul unui fir infinit cu densitatea liniară λ .

** **1.2.276.** Deduceți expresiile câmpului și potențialului gravitațional produs de o sferă omogenă de masă m și rază R .

** **1.2.277.** Un corp este aruncat vertical în sus de la suprafața Pământului cu viteză inițială v_0 . a) Neglijând rezistența aerului, aflați la ce înălțime maximă se ridică corpul și timpul de urcare (se ține seama de variația lui g cu altitudinea). b) Dacă corpul cade liber de la o înălțime h , aflați cu ce viteză ajunge pe Pământ și timpul de cădere.

1.3. ENERGIA MECANICĂ

1.3.1. Un corp de masă $m = 1,00$ kg urcă vertical uniform accelerat. Pe o anumită distanță $h = 1,00$ m el are viteza medie $\langle v \rangle = 5,00$ m/s și

viteza sa crește cu $\Delta v = 0,50$ m/s. Aflați lucrul mecanic efectuat asupra corpului pe această distanță.

1.3.2. O lăcustă, îndreptându-și picioarele de lungime $l = 5,0$ cm, sare pînă la o înălțime $h = 30$ cm. Evaluați puterea medie dezvoltată pe unitatea de masă (puterea specifică) a lăcustei.

1.3.3. Un vagonet de masă $m = 300$ kg trebuie să parcurgă o distanță $s = 734$ m într-un timp minim, accelerînd uniform și frînînd uniform. Coeficientul de frecare la lunecare între roți și șine $\mu = 0,20$. Aflați timpul minim posibil și puterea minimă necesară a motorului.

1.3.4. De un tren de masă $M = 100$ t care merge rectiliniu uniform se desprinde ultimul vagon de masă $m = 10,0$ t. Ce distanță parcurge acest vagon pînă la oprire, dacă puterea locomotivei este tot timpul constantă $P = 300$ kW, iar după desprindere viteza trenului este constantă $v' = 72$ km/h? Se consideră că toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea.

1.3.5. Dacă imprimăm sistemului din figură o anumită viteză, dînd un impuls corpului $m_2 = 20$ g în jos, acesta coboară cu $h_1 = 25$ cm. Dacă imprimăm sistemului aceeași viteză, dînd un impuls corpului $m_1 = 100$ g spre stînga, corpul m_2 urcă cu $h_2 = 5,0$ cm. Aflați coeficientul de frecare μ . (Scripetele este ideal.)

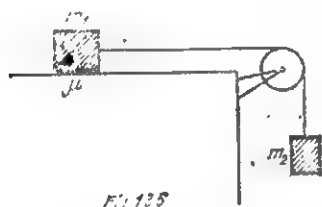


Fig. 13.5

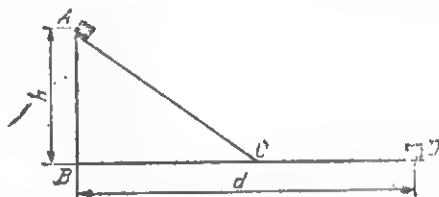


Fig. 13.11

**** 1.3.6.** Pe o masă este întins un lanț. Un capăt al lanțului, de care este prins un corp greu, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd porțiunea de lanț de pe masă are lungimea l_0 , lanțul este în echilibru; dar la o mică trepidație începe să lunece. Aflați viteza lanțului în momentul cînd el părăsește masa, mai general, viteza lanțului în funcție de deplasarea capătului său liber.

1.3.7. O săniuță coboară pe un plan înclinat de înălțime $h = 2,00$ m și bază $b = 5,00$ m, racordat cu un plan orizontal, pe care săniuța se oprește parcurgînd o distanță $s = 35$ m. Aflați coeficientul de frecare la lunecare μ . (Aplicați considerații energetice)

1.3.8. Un corp lunecă liber, fără viteză inițială, din vîrfurile unui plan înclinat, de unghi $\alpha = 9,0^\circ$, care are jumătatea superioară absolut netedă fără frecări, iar jumătatea inferioară cu coeficientul de frecare μ . Pentru ce valori μ corpul poate ajunge la baza planului? (Aplicați considerații energetice.)

1.3.9. Un motor de putere $P = 4,9$ kW trage uniform în sus de-a lungul unui plan înclinat un corp. Cunoșcînd impulsul corpului $p = 1000$ N.s și unghiul de frecare $\varphi = 3,0^\circ$, aflați unghiul planului.

1.3.10. Un corp de masă $m = 200$ g este lansat cu viteză inițială $v_0 = 12$ m/s în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$. Coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,30$. Cîtă căldură se degajă prin frecare în timpul $t = 3,5$ s de la lansare?

1.3.11. Ce viteză trebuie să aibă schiorul în punctul D pentru a putea urca liber pînă în punctul A? Se dau: înălțimea $h = 1,00$ m, distanța

orizontală $d = 10$ m și coeficientul de frecare $\mu = 0,10$. Cu ce viteză se întoarce liber înapoi în punctul D ?

1.3.12. Un corp de masă $m = 2,00$ kg alunecă liber pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$. După o distanță $s = 1,00$ m corpul are viteza $v = 3,7$ m/s. Calculați pierderea de energie mecanică.

(**) **1.3.13.** O sanie de masă $m = 40$ kg este trasă lent în sus pe un deal de zăpadă de înălțime $h = 2,00$ m și lungime pe orizontală $l = 10,0$ m. În fiecare moment sfoara este tangentă la suprafața dealului, iar coeficientul de frecare este $\mu = 0,050$. Aflați lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune.

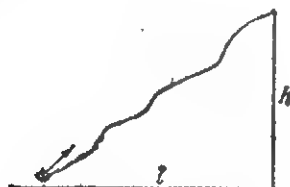


Fig. 1.13

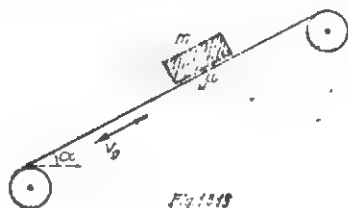


Fig. 1.14

1.3.14. Un avion de masă $m = 2,5$ t cu motor oprit planează cu viteză $v = 144$ km/h coborînd de la o înălțime $h_1 = 2,0$ km pînă la o înălțime $h_2 = 1,0$ km, parcurgînd o distanță $d = 10$ km. Ce putere trebuie să dezvolte motorul pentru a se întoarce înapoi cu aceeași viteză?

1.3.15. O sanie de masă $m = 200$ kg urcă un deal cu viteză $v = 36$ km/h motorul dezvoltînd o putere $P = 0,80$ kW. Coeficientul de frecare cu zăpada $\mu = 0,010$. Aflați panta dealului.

1.3.16. Un camion de masă $m = 4,0$ t coboară o pantă $p = 5,0$ % cu viteză constantă $v = 54$ km/h cu motor decuplat. Ce putere trebuie să dezvolte motorul pentru a urca înapoi aceeași pantă cu aceeași viteză?

1.3.17. Un camion urcă o pantă mică (sub 5°) cu viteză $v_1 = 30$ km/h și apoi coboară pe aceeași pantă cu viteză $v_2 = 50$ km/h cu aceeași putere a motorului. Ce viteză va avea camionul pe un drum orizontal la aceeași putere a motorului? Foarte forțele de rezistență sînt proporționale cu apăsările normale.

1.3.18. Pe o bandă rulantă, înclinată cu unghiul $\alpha = 30^\circ$, care se mișcă în jos cu viteză $v_0 = 0,50$ m/s, se așează ușor o cărămidă de masă $m = 2,0$ kg. Ce lucru mecanic efectuează forța de frecare asupra cărămidii pînă aceasta se oprește față de bandă, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,40$?

1.3.19. Un corp este aruncat sub unghiul $\alpha_0 = 15^\circ$ cu energia cinetică $E_0 = 10,0$ J. Calculați energiile cinetică și potențială la înălțimea maximă.

1.3.20. Sub ce unghi față de orizontală trebuie aruncat un corp, pentru ca energia sa cinetică în punctul de înălțime maximă să fie $f = 25$ % din energia cinetică inițială din punctul de lansare?

(*) **1.3.21.** Pe suprafața orizontală netedă a gheții stă în repaus o scîndură de masă $M = 1,00$ kg și lungime $l = 1,00$ m, la capătul căreia stă o pisică de masă $m = 2,00$ kg. a) Cu ce viteză minimă față de gheață trebuie să sară pisica pentru a cădea la celălalt capăt al scîndurii? b) Sub ce unghi față de orizontală trebuie să fie viteza pentru ca energia cheltuită de pisică pentru salt să fie minimă?

1.3.22. Un lanț de lungime $l = 20$ m este trecut simetric peste un scripete ideal ($R \ll l$). Datorită unei trepidații lanțul începe să coboare. Aflați viteza lanțului în momentul cînd părăsește scripetele.

1.3.23. O particulă se mișcă uniform pe un cerc de rază $R = 50$ cm, avînd energia cinetică $E_c = 10,0$ J. Aflați forța care acționează asupra particulei; puterea dezvoltată de această forță și lucrul mecanic efectuat de această forță la o rotație.

1.3.24. Din virful O al unui semicilindru fix coboară liber, fără viteză inițială și fără frecări un mic corp de masă m . Aflați și reprezentați în funcție de unghiul θ forța de apăsare exercitată de corp asupra cilindrului.

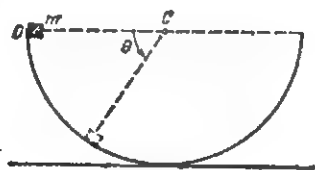


Fig. 1.3.24

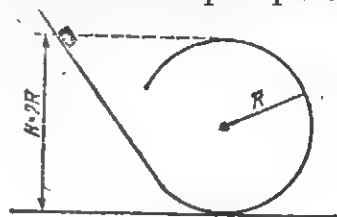


Fig. 1.3.25

1.3.25. De la înălțimea $H = 2R$ lunecă pe un plan inclinat fără frecare un mic corp. Planul inclinat continuă cu o buclă circulară de rază R în planul vertical. La ce înălțime corpul se desprinde de buclă?

1.3.26. Un corp de masă $m = 0,50$ kg alunecă liber de la o înălțime $h = 2,00$ m și descrie bucla din figură de rază $R = 40$ cm astfel încît în punctul superior al buclei apăsarea este zero. Aflați căldura degajată prin frecare de-a lungul traiectoriei pînă la acest punct.

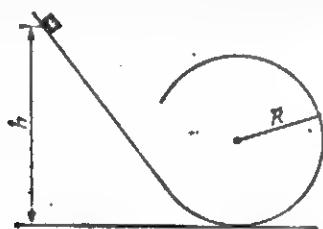


Fig. 1.3.26

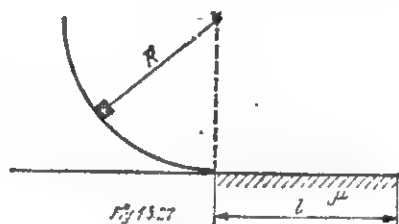


Fig. 1.3.27

1.3.27. Un mic corp lunecă fără frecare pe suprafața interioară a unui cilindru de rază $R = 4,00$ m după care intră pe un plan orizontal rugos cu coeficientul de frecare $\mu = 0,20$, oprindu-se după parcurgerea distanței $l = 30$ m. La ce înălțime h corpul apăsă pe cilindru cu o forță $N = fmg$, $f = 2,0$?

1.3.28. Un corp de masă m suspendat de un fir oscilează într-un plan vertical sub acțiunea greutății cu amplitudinea unghiulară α (pendulul simplu gravitațional). Care este tensiunea din fir în momentul cînd firul formează unghiul θ cu verticala? Care este tensiunea maximă și minimă?

1.3.29. Un pendul simplu gravitațional oscilează cu amplitudinea unghiulară $\alpha = 75^\circ 31'$. Pentru ce deviație a firului tensiunea din fir este egală în modul cu tensiunea din starea de echilibru static a pendulului?

1.3.30. Un pendul simplu gravitațional are bila de masă $m = 50$ g suspendată de un fir de lungime $l = 1,00$ m. Știind că bila are viteză maximă $v_m = 1,41$ m/s, aflați tensiunea minimă din fir.

1.3.31. Într-un tub orizontal oscilează fără frecare un mic corp de masă m pe un arc de cerc de lungime egală cu diametrul tubului. Aflați forța de apăsare pentru o poziție oarecare a corpului cînd raza vectorie face unghiul θ cu verticala. Cît este apăsarea maximă?

1.3.32. Unei bile suspendate de un fir i se imprimă o viteză orizontală. Când firul a deviat cu unghiul $\theta = 30^\circ$ accelerația bilei a fost orizontală. Aflați unghiul de deviație maximă.

1.3.33. La ce tensiune minimă de rupere trebuie să reziste un fir pentru ca o bilă de masă m suspendată de fir să poată descrie un cerc în planul vertical?

1.3.34. De un fir, respectiv tijă imponderabilă, de lungime l este suspendată o bilă. Ce viteză orizontală trebuie imprimată bilei pentru ca ea să urce pînă în punctul superior diametral opus? Aflați tensiunile maxime.

1.3.35. De tavanul unui lift este suspendată printr-un fir de lungime $l = 80$ cm o bilă care oscilează cu amplitudinea unghiulară $\alpha = 60^\circ$. Când firul trece prin poziția verticală cablul de susținere a liftului se rupe și sistemul cade liber. Ce viteză față de Pămînt va avea bila atunci cînd lovește tavanul?

(*) **1.3.36.** Un satelit cu masa $m = 200$ kg zboară la altitudinea $h_1 = 100$ km pe o orbită circulară. Datorită frecării cu straturile superioare ale atmosferei, satelitul ajunge pe o orbită circulară la altitudinea $h_2 = 90$ km. Cîtă căldură se dezvoltă prin frecare?

1.3.37. Unei bile suspendate de un fir de lungime $l = 1,00$ m i se imprimă o viteză orizontală $v_0 = 6,0$ m/s. La ce înălțime firul va slăbi și bila va părăsi cercul? Ce viteză va avea bila în acest moment?

1.3.38. O bilă de masă $m = 100$ g suspendată de un fir de lungime $l = 20$ cm este deviată cu $\alpha = 60^\circ$ și i se comunică o viteză $v_0 = 2,0$ m/s perpendicular pe fir în planul vertical conținînd firul. Aflați forța minimă la care trebuie să reziste firul.

1.3.39. Pe o tijă subțire (de masă neglijabilă) ținută orizontal sînt fixate două bile de mase $m_1 = 3,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg la distanțele $r_1 = 1,00$ m, $r_2 = 2,00$ m de axa orizontală transversală în jurul căreia se poate roti tija în planul vertical, ca în figură. Ce viteză va avea bila inferioară cînd tija, lăsată liber, va trece prin poziția verticală?



Fig. 13.39

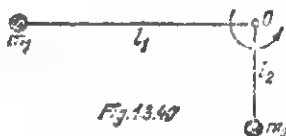
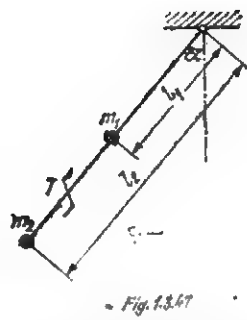
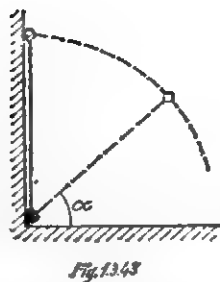


Fig. 13.40

1.3.40. Sistemul din figură cu masele $m_1 = 0,50$ kg, $m_2 = 0,50$ kg fixate pe tije de lungime $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 30$ cm, este lăsat liber să se rotească în jurul axei orizontale O . Aflați viteza unghiulară cînd tija l_1 devine verticală.

1.3.41. Pe o tijă de masă neglijabilă, avînd la capătul superior o articulație, sînt fixate două corpuri de mase $m_1 = 200$ g, $m_2 = 100$ g la distanțele $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 80$ cm de articulație. Tija este deviată cu unghiul $\alpha = 60^\circ$ și lăsată liber. Ce viteză unghiulară va avea tija atunci cînd trece prin poziția verticală?

1.3.42. O halteră formată din două bile identice legate printr-o tijă de masă neglijabilă, oscilează în planul vertical ca în figură cu amplitudinea $\alpha = 60^\circ$, $r = 10$ cm, $R = 30$ cm. Ce viteză unghiulară are haltera cînd trece prin poziția verticală?



1.3.43. O halteră formată din două bile mici de masă m fiecare, legate printr-o tijă subțire lungă, este menținută în poziție verticală, sprijinită de un perete vertical ca în figură. Cu ce forță va apăsa bila inferioară asupra peretelui vertical în momentul cînd în căderea sa liberă tija halterei formează unghiul α cu orizontala? (Se neglijează frecările).

1.3.44. Un corp de masă $m = 1,00$ kg este coborît uniform cu viteza $v = 2,00$ m/s cu ajutorul unui fir elastic de constantă $k = 100$ N/m. Care va fi tensiunea maximă din fir dacă oprim brusc capătul superior al firului?

1.3.45. De un resort de constantă $k = 100$ N/m și de lungime nedeformată $l = 1,00$ m, deviat de la verticală, este atîrnat un corp de masă $m = 1,50$ kg. Lăsat liber resortul arată o forță maximă $F = 30$ N în timpul oscilațiilor. Cu ce unghi a fost deviat inițial resortul?

1.3.46. Un fir de lungime $l = 2,00$ m rezistă pînă la o tensiune de rupere $T_r = 14,7$ N. Un capăt al firului este fixat la înălțimea $h = 4,00$ m deasupra solului, iar de celălalt se atîrnă o bilă de masă $m = 1,00$ kg. Devind firul cu bila pînă la orizontală, i se dă drumul. La ce distanță pe orizontală de punctul de suspensie va cădea bila pe Pămînt?

1.3.47. Un pendul gravitațional este format dintr-o tijă subțire de greutate neglijabilă și două corpuri $m_1 = 0,60$ kg, $m_2 = 0,40$ kg punctiforme la distanțele $l_1 = 0,50$ m, $l_2 = 1,00$ m de articulație ca în figură. Știind amplitudinea unghiulară $\alpha = 60^\circ$, aflați tensiunea din tijă între cele două corpuri în momentul cînd tija trece prin poziția verticală.

1.3.48. Pe un fir foarte lung este suspendată o bilă de masă $m_1 = 100$ g de care este legată în continuare printr-un fir de lungime $l = 20$ cm o altă bilă de masă $m_2 = 50$ g. Ce viteză orizontală minimă v_0 trebuie imprimată bilei 2 pentru ca să ajungă la același nivel cu bila 1?

1.3.49. O tijă subțire de masă neglijabilă are la capete două bile de mase $m_1 = 0,300$ kg, $m_2 = 0,700$ kg și se poate roti liber în jurul unei axe orizontale perpendiculare pe mijlocul tijei. Inițial tija este ținută orizontal și apoi i se dă drumul. Aflați tensiunile din tijă în momentul cînd tija trece prin poziția verticală.

1.3.50. Un vagon se mișcă orizontal cu viteza $v_0 = 36$ km/h după care intră pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 6,0^\circ$, racordat cu planul orizontal. Peste tot frecările sînt neglijabile. În vagon este suspendat de tavan un pendul simplu gravitațional de lungime $l = 1,00$ m în repaus față de vagon pe planul orizontal. a) Care va fi amplitudinea de oscilație a pendulului pe planul înclinat, la urcarea și la coborîrea vagonului? b) Dar în cazul unui teleferic și unghiul $\alpha = 30^\circ$?

1.3.51. O tijă de lungime l de masă neglijabilă are capătul inferior într-o articulație, iar la capătul superior o bilă de masă m care se sprijină

pe suprafața laterală a unui bloc de masă M . Frecările sunt neglijabile. Datorită unui mic impuls sistemul pornește spre dreapta. Aflați unghiul pe care-l va face tija cu orizontala în momentul desprinderii de bloc și viteza blocului M în acel moment. Aplicație numerică: $l = 1,00$ m, $M/m = 4,0$.

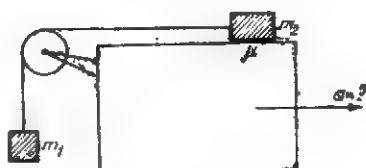
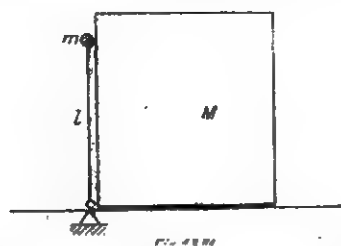


Fig. 10.54

1.3.52. Din vârful unei emisfere fixe absolut netede de rază R lunecă fără viteză inițială un mic corp. Aflați: a) punctul de unde se desprinde corpul de sferă, b) unghiul sub care lovește el planul orizontal și c) înălțimea la care urcă după ciocnirea perfect elastică cu planul orizontal.

1.3.53. Un mic corp este așezat în vârful unei sfere de rază R , care stă pe un plan orizontal. Sferei i se comunică o viteză orizontală constantă v_0 . Neglijând frecările, aflați la ce înălțime se ridică corpul după ciocnirea perfect elastică cu planul orizontal.

1.3.54. Ce accelerație trebuie imprimată blocului din figură (sistemul fiind inițial în repaus) pentru ca corpul m_2 să înceapă să lungească pe bloc? Se dau $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 7,50$ kg, $\mu = 0,40$.

1.3.55. Două corpuri de mase $m_1 = 0,45$ kg, $m_2 = 1,50$ kg sînt suspendate pe fire de o tijă subțire de masă neglijabilă, la distanțele $l_1 = 1,00$ m, $l_2 = 0,60$ m de suport, corpul m_2 fiind așezat pe podea. Cu ce unghi α trebuie deviat firul cu m_1 pentru ca la revenire corpul m_2 să se desprindă de podea?

1.3.56. De pe vârful unei sfere fixe netede (fără frecări) lunecă fără viteză inițială un mic corp. La ce distanță de la punctul inferior al sferei va cădea?

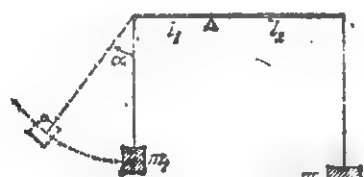


Fig. 10.55

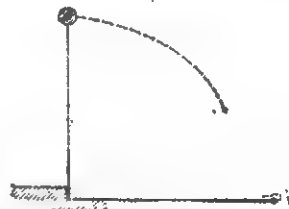


Fig. 10.56

1.3.57. Bila din figură, fixată la capătul unei tije subțiri de masă neglijabilă, începe să cadă din poziție verticală fără viteză inițială. Aflați unghiul format de viteză cu orizontala în momentul ciocnirii podelei.

1.3.58. Două resorturi de constante elastice $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 200$ N/m sînt legate în serie, un capăt al resortului compus fiind fix, iar de celălalt se trage încet pînă cînd resortul 2 se alungește cu $s = 10,0$ cm. Aflați lucrul mecanic efectuat.

1.3.59. În figură $m_1 = 0,20$ kg, $m_2 = 0,10$ kg, $k = 20$ N/m, $F = 6,0$ N coeficientul de frecare este același pentru ambele corpuri. Ce energie potențială are resortul în regim staționar?

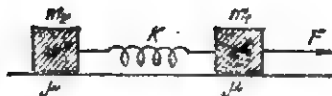


Fig. 1.3.59

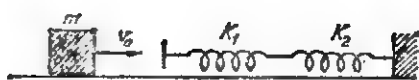


Fig. 1.3.61

1.3.60. Un corp de masă $m = 1,00$ kg avînd viteza inițială v_0 comprimă cele două resorturi de constante elastice $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 200$ N/m, legate în serie ca în figură. Cunoșcînd energia de deformare maximă $E_2 = 6,0$ J a resortului 2, aflați viteza v_0 .

1.3.61. Două corpuri identice de masă $m = 0,50$ kg fiecare sînt legate printr-un resort de constantă elastică $k = 30$ N/m și așezate pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,20$. Inițial resortul nu este deformat. Ce viteză minimă trebuie imprimată corpului din dreapta, spre celălalt corp sprijinit de perete, pentru ca acesta din urmă să se desprindă de perete?

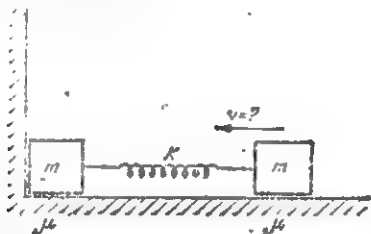


Fig. 1.3.62

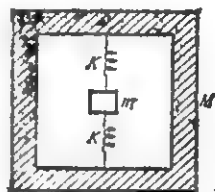


Fig. 1.3.63

1.3.62. Cutia de masă $M = 10,0$ kg din figură, cade liber de la o înălțime h , corpul $m = 1,00$ kg fiind în timpul căderii în repaus față de cutie. Aflați h astfel ca după ciocnirea plastică a cutiei cu solul, cutia să se desprindă ulterior de sol. Constanta elastică $k = 100$ N/m.

1.3.63. Un acrobat cade de la o înălțime $H = 12$ m pe o plasă orizontală întinsă pe care o curbează cu $h = 1,0$ m. Plasa are dimensiuni mari, dar masă neglijabilă față de masa omului. Evaluați de cîte ori forța maximă asupra omului este mai mare decît greutatea sa.

1.3.64. Un lift de masă $m = 1,00$ t coboară uniform cu viteza $v = 10$ m/s suspendat fiind pe un cablu elastic de oțel. La un moment dat capătul superior al cablului este blocat. Care va fi tensiunea maximă din cablu? Constanta elastică a cablului $k = 962$ kN/m.

1.3.65. Corpul de masă $m = 12,0$ kg este deplasat foarte încet orizontal pe o distanță $s = 0,40$ m cu ajutorul unei forțe F aplicată sub unghiul $\alpha = 30^\circ$ prîu intermediul unui resort de constantă $k = 300$ N/m, inițial nedeformat. Coeficientul de frecare $\mu = 0,40$. Aflați lucrul mecanic efectuat de forța F .

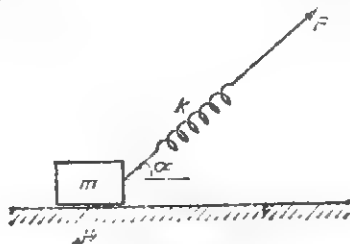


Fig. 1.3.65

1.3.66. De-a lungul unui fir elastic de lungime $l_0 = 1,00$ m, de constantă elastică $k = 50$ N/m și de masă neglijabilă, lunecă un manșon greu astfel încît forța de frecare dintre fir și manșon este $F_f = 10,0$ N. Aflați căldura degajată.

**** 1.3.67.** Un corp începe să lunece pe un plan înclinat de unghi α avînd un coeficient de frecare la lunecare $\mu = b \times$. Calculați distanța parcursă pînă la oprire și viteza maximă atinsă.

**** 1.3.68.** O bilă de masă m atîrnată de un fir oscilează într-un plan vertical cu amplitudinea unghiulară α . Aflați în funcție de unghiul θ format de fir cu verticala: a) tensiunea din fir, b) accelerația bilei, c) valorile extreme ale accelerației.

**** 1.3.69.** Un lăntșor de lungime l este așezat pe suprafața unei sfere de rază R , fără frecări, astfel încît un capăt al lăntului se află în virful sferei. Cu ce accelerație va porni lăntșorul imediat ce îl lăsam liber?

*** 1.3.70.** Energia cinetică a unei particule care se mișcă pe un cerc de rază R depinde de arcul s după legea $E_c = As^2$. Aflați forța $F(s)$.

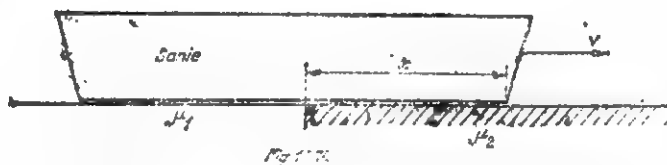
**** 1.3.71.** O rachetă de masă m pornește vertical în sus sub acțiunea unei forțe de tracțiune $F = 2mg(1 - Ay)$, unde $A = \text{const} > 0$. Aflați lucrul mecanic efectuat de această forță de tracțiune pe toată durata urcării.

*** 1.3.72.** Energia potențială a unei particule într-un cîmp de forțe cu simetrie sferică este $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, unde a, b sînt constante pozitive.

Aflați: a) distanța la care particula poate sta în echilibru, b) forța de atracție maximă, c) reprezentați grafic forța și energia potențială.

*** 1.3.73.** O particulă de masă m se mișcă pe un cerc de rază R cu accelerația normală $a_n = At$, $A > 0$. a) Aflați puterea dezvoltată de forțele aplicate. b) Dacă puterea dezvoltată de forțele este constantă $P = P_0 = \text{const}$, deduceți legea accelerației normale.

**** 1.3.74.** O sanie de masă m și lungime l intră la un moment dat ($t = 0$) cu viteza v_0 de pe zăpadă cu coeficientul de frecare la lunecare μ_1 , pe asfalt cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu_2 > \mu_1$. Calculați: a) distanța și timpul pînă la oprire, b) căldura pe unitatea de timp, maximă degajată.



**** 1.3.75.** Asupra pinzei de arie S a unei bărci suflă vînt cu viteza v_0 , exercitînd o forță $F = k \frac{1}{2} S \rho (v_0 - v)^2$, unde v este viteza bărcii, ρ —

densitatea aerului. Aflați: a) legea vitezei și legea mișcării bărcii neglijînd forțele de frecare sau de rezistență. Barca pornește din repaus. b) În cît timp barca atinge o fracțiune f din viteza vîntului v_0 și ce distanță parcurge în acest timp? Faceți o evaluare numerică. c) Pentru ce viteză a bărcii puterea dezvoltată de forța vîntului este maximă?

**** 1.3.76.** Un mic corp de masă m lunecă pe suprafața interioară a unei sfere de rază R , cu coeficientul de frecare la lunecare μ , pornind fără viteză

inițială din extremitatea unui diametru orizontal al sferei. Exprimați energia cinetică a corpului în funcție de unghiul la centru θ descris de raza vectoare a corpului.

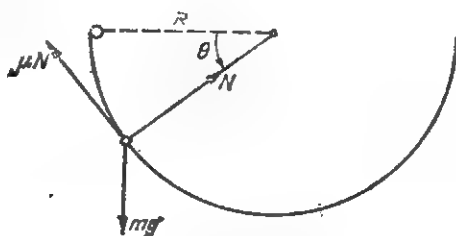
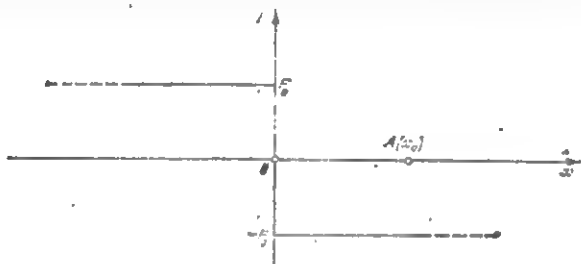


Fig. 1.176

(**) 1.3.77. O particulă se mișcă pe o axă orizontală Ox într-un câmp de forțe, dependent de coordonată, conform graficului din figură, unde $F_0 = 10$ N. Așupra particulei acționează de asemenea și o forță de frecare cu $|F_f| < F_0$. Particula pleacă din punctul A de abscisă $x_0 = 0,10$ m fără viteză inițială. a) Calculați căldura degajată prin frecare pînă la oprirea particulei. b) Considerînd $|F_f| = \text{const}$, reprezentați calitativ viteza particulei în funcție de coordonată (traectoria în spațiul fazelor).



** 1.3.78. Viteza unui vehicul de masă m variază după legea $v = c \frac{t}{t + \tau}$.

a) Reprezentați grafic legea vitezei și arătați care este semnificația fizică a constantelor c , τ . b) Neglijînd forțele pasive de frecare și de rezistență calculați lucrul mecanic al forței de tracțiune pe intervalul $(0, t)$. c) Verificați teorema variației energiei cinetice.

** 1.3.79. Viteza unui avion de masă m , pe o porțiune de accelerare variază după legea $v = v_0 + Ax$ ($v = v_0$ la $t = 0$). Calculați lucrul mecanic efectuat în intervalul $(0, t)$. Ce semnificație are constanta A ?

** 1.3.80. Un vehicul merge pe o șosea spre Nord. Așupra vehiculului acționează forța de presiune a vîntului care se intensifică odată cu deplasarea vehiculului, după legea $F = F_0 + As$, și în același timp vîntul își schimbă direcția de la S—N pînă ajunge la E—V după legea $\theta = Bs$. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța de presiune a vîntului.

** 1.3.81. Un corp de masă m se mișcă rectiliniu după legea $x = A + Bt + Ct^2$. Aflați lucrul mecanic al forțelor aplicate efectuat în intervalul $(0, t)$.

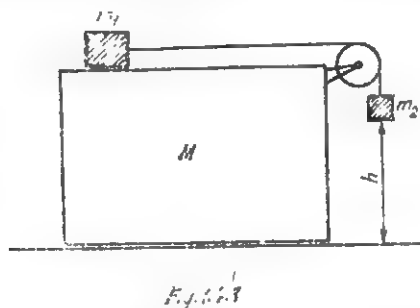
1.4. IMPULSUL

MECANIC

1.4.1. Două tije de aceeași secțiune sînt lipite cap la cap, astfel ca CM să fie în punctul de alipire. Știind raportul densităților ρ_1/ρ_2 , aflați raportul lungimilor și al maselor tijelor.

1.4.2. Într-o barcă de masă $M = 40$ kg, aflată în repaus, stau la extremități doi pescari de mase $m_1 = 40$ kg, $m_2 = 70$ kg, la distanța $d = 5,0$ m unul de altul. Pescarii își schimbă locurile. Cu cît se va deplasa barca?

1.4.3. În sistemul din figură $M = 2,00$ kg, $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg, $h = 1,50$ m. Frecările sînt neglijabile și scripetele este ideal. Cu cît se deplasează corpul M pînă în momentul cînd m_2 atinge planul orizontal?



1.4.4. O moleculă se mișcă cu viteza $v_1 = 300$ m/s și lovește perfect elastic, frontal, un piston care se mișcă în același sens cu viteza $v_2 = 30$ m/s. Ce fracțiune din energia sa pierde molecula?

1.4.5. Un corp de masă m_1 lovește frontal, perfect elastic, un alt corp de masă m_2 în repaus. Cunoscînd raportul $r = m_2/m_1$, aflați în ce raport se schimbă energia corpului m_1 prin ciocnire.

1.4.6. O locomotivă se mișcă cu viteza v_0 și lovește frontal perfect elastic un mic cărucior aflat în repaus. Ce viteză va căpăta căruciorul?

1.4.7. Un fascicul paralel de particule identice, fiecare de masă $m = 1,00$ mg și viteză $v = 10,0$ m/s în direcția fasciculului, lovește perpendicular un perete (piston) care se mișcă în aceeași direcție cu viteza $u = 2,00$ m/s. Concentrația particulelor în fascicul este $n = 10 \cdot 10^8$ m⁻³ și o fracțiune $f = 0,40$ din ele sînt absorbite de perete, iar restul reflectate absolut elastic. Ce presiune se exercită asupra peretelui?

1.4.8. O particulă mică cade liber în atmosferă de la o înălțime mare. La suprafața Pămîntului particula lovește perfect elastic o placă orizontală fixă. Aflați accelerația particulei imediat după ciocnire.

1.4.9. Două baloane sferice de volume egale $V = 1,00$ m³, dar de mase diferite $m_1 = 7,2$ kg, $m_2 = 5,2$ kg, sînt legate între ele printr-un fir lung. Baloanele coboară vertical în atmosferă liniștită de la o înălțime mare. a) Aflați tensiunea din fir cînd baloanele ajung în vecinătatea suprafeței Pămîntului. b) La suprafața Pămîntului primul balon ciocnește perfect elastic acoperișul orizontal al unui bloc. Aflați accelerația acestui balon imediat după ciocnire. Se dă densitatea aerului $\rho = 1,3$ kg/m³.

1.4.10. Într-o barcă de masă $M = 280$ kg stau doi oameni de mase egale $m = 70$ kg. Fiecare om începe să alerge cu viteza relativă $u = 6,0$

m/s față de barcă și sare în apă. Aflați viteza bărcii dacă oamenii încep să alerge și sar: a) în același sens simultan și consecutiv, b) în sensuri opuse simultan și consecutiv.

1.4.11. Un corp de masă $M = 990$ g aflat în repaus pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare $\mu = 0,050$ este ciocnit plastic de un glonț de masă $m = 10$ g cu viteza $v = 200$ m/s. Ce distanță parcurge sistemul?

1.4.12. Într-un jgheab orizontal neted se află n corpuri cu masele descrescînde m_1, \dots, m_n , astfel ca $m_i/m_{i+1} = k > 1$. I se imprimă primului corp viteza v_1 spre celelalte corpuri. Considerînd ciocnirile perfect elastice, aflați viteza ultimului corp și randamentul energetic.

1.4.13. Pe un plan orizontal fără frecări se află două corpuri $m = 20$ g și $M = 30$ g. Planul orizontal continuă (racordat) cu un plan înclinat pe care coeficientul de frecare este același pentru ambele corpuri. Imprimînd corpului m o viteză convenabilă v_0 spre corpul M , primul corp se oprește după ciocnire, iar corpul M urcă pe planul înclinat pînă la o înălțime $h_1 = 40$ cm. Schimbînd între ele corpurile, se imprimă corpului M aceeași viteză v_0 și atunci corpul m urcă după ciocnire pe planul înclinat pînă la înălțimea h_2 . Aflați h_2 .

1.4.14. Pe o suprafață orizontală absolut netedă stă o scindură de masă $M = 1,60$ kg și lungime $l = 1,20$ m peste care este așezat la un capăt un corp de masă $m = 0,40$ kg, avînd coeficientul de frecare $\mu = 0,30$ cu scindura. Ce viteză orizontală minimă trebuie imprimată brusc scindurii astfel încît corpul m să lunece și să cadă de pe scindură?

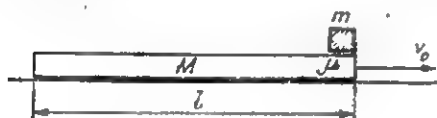


Fig. 1.4.15

Fig. 1.4.14

1.4.15. Unui corp de masă $m_1 = 1,00$ kg, așezat la capătul unei scinduri orizontale lungi de masă $m_2 = 2,00$ kg, i se imprimă o viteză orizontală $v_0 = 2,00$ m/s orientată spre celălalt capăt. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și scindură $\mu = 0,20$, iar între scindură și masă zero. Aflați distanța parcursă de corp pe scindură.

1.4.16. Un corp de masă $m = 1,00$ kg este lansat pe un cărucior de masă $M = 4,00$ kg și lungime $l = 0,80$ m, aflat în repaus și care se poate mișca fără frecare pe planul orizontal. Cu ce viteză trebuie lansat corpul pentru ca să se oprească în punctul de lansare după ce s-a ciocnit perfect elastic de peretele de la extremitatea căruciorului, ca în figură? Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și cărucior este $\mu = 0,20$.

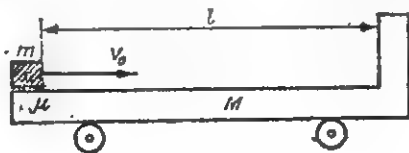


Fig. 1.4.16

1.4.17. Un obuz aflat în repaus explodează în două fragmente de mase $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 2,00$ kg care capătă energia cinetică totală $W = 30$ kJ. Aflați vitezele fragmentelor.

1.4.18. Un balon de sticlă se sparge de podea dacă cade liber de la o înălțime minimă $h = 0,90$ m. Ce viteză minimă trebuie să aibă acest balon ca lovind un alt balon identic aflat inițial în repaus, baloanele să se spargă?

1.4.19. Un glonț de masă $m = 10$ g zburind orizontal cu viteza $v_0 = 500$ m/s străpunge un bloc de lemn de masă $M = 1,00$ kg, așezat pe o masă orizontală netedă, fără frecări, și iese cu viteza $v = 300$ m/s. Aflați ce fracțiune din energia glonțului se transformă în căldură.

1.4.20. Un glonț zburind cu viteza v_0 străpunge mai multe scinduri identice așezate transversal. După străpungerea primei scinduri viteza glonțului $v' = fv_0$, unde $f = 0,80$. Aflați în a cîta scindură glonțul se va opri.

1.4.21. Un patinator de masă $M = 60$ kg aruncă orizontal o bilă de masă $m = 6,0$ kg care în momentul desprinderii de patinator are viteza relativă $u = 2,20$ m/s față de patinator. Aflați lucrul mecanic efectuat de patinator și coeficientul de frecare la lunecare dacă patinatorul se deplasează după aruncare cu $s = 20$ cm.

1.4.22. O bilă de masă $m = 10$ g, căzînd liber în jos, lovește podeaua și urcă la înălțimea $h = 80$ cm. Variația de impuls la ciocnire este $|\Delta \vec{p}| = 0,17$ kg·m/s. La ce înălțime va urca bila după următoarea ciocnire cu podeaua dacă pierderea procentuală de energie la ciocnire este aceeași?

1.4.23. Într-un vagonet de masă $M = 20$ kg care se mișcă orizontal cu viteza $v = 5,0$ m/s, cade de la înălțimea $h = 3,0$ m o cărămidă de masă $m = 5,0$ kg. Aflați căldura degajată.

1.4.24. Asupra unui tren care merge cu viteza $v_0 = 72$ km/h cade la un moment dat vertical ploaia cu debitul $Q = 10,0$ kg/s, care apoi se scurge pe pereții vagoanelor. Cu cît trebuie să crească puterea locomotivei pentru a păstra viteza neschimbată?

1.4.25. Corpul $m_1 = 1,00$ kg, căzînd liber pe distanța $h_1 = 1,60$ m, ciocnește perfect elastic corpul $m_2 = 2,00$ kg aflat în repaus, care imediat după ciocnire este lăsat liber. Sistemul ciocnește apoi plastic planul orizontal la distanța $h_2 = 2,00$ m. Aflați forța de impact cu care sistemul va ciocni planul orizontal, dacă durata ciocnirii este $\tau = 10$ ms.



Fig. 1.4.25

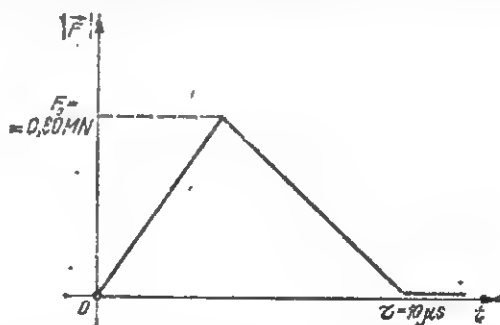


Fig. 1.4.30

1.4.26. O minge de masă $m = 100$ g cade fără viteză inițială de la o înălțime $h = 54,5$ cm. După fiecare lovire a podelei viteza mingii reprezintă o fracțiune $k = 0,90$ din viteza de dinaintea ciocnirii (coeficientul de restituție), iar timpul de contact cu podeaua reprezintă o fracțiune $f = 0,20$ din timpul de cădere respectiv. Aflați timpul pînă la oprirea definitivă a mingii și distanța totală parcursă de minge.

1.4.27. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată o scară pe care stă un om. Masa aerostatului cu scara este $M = 40$ kg, iar a omului $m = 60$ kg. Ce viteză va avea aerostatul, dacă omul începe să urce pe scară cu viteza $u = 1,00$ m/s față de scară? Câtă energie cinetică dezvoltă omul punându-se în mișcare?

1.4.28. Un vagonet de masă $m = 8,0$ kg semișcă cu viteza $v_0 = 9,8$ m/s fără frecări. Pe platforma vagonetului se așează o cărămidă de masă $m_0 = 2,00$ kg. Ze distanță parcurge cărămida pe platformă pînă la oprirea sa față de platformă? Coeficientul de frecare între cărămidă și platformă $\mu = 0,40$.

1.4.29. Trei bărci merg una după alta cu viteza $v = 0,60$ m/s fiecare. În fiecare barcă se află cite un om, astfel încît masa bărcii și a omului este $M = 90$ kg, iar în barca din mijloc mai sînt doi saci de masă $m = 10,0$ kg fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați succesiv cei doi saci, unul spre barca din față, apoi al doilea spre barca din spate, cu aceeași viteză relativă $u = 1,10$ m/s față de barcă. Aflați vitezele finale ale bărcilor. **(*)1.4.30.** Două bile de mase $m_1 = 0,20$ kg, $m_2 = 0,40$ kg se mișcă cu vitezele $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = -15$ m/s (una spre cealaltă). Forța de interacțiune dintre bile se poate aproxima prin linia frîntă din figură. Considerînd ciocnirea unidimensională, calculați vitezele finale, coeficientul de restituție și căldura degajată prin ciocnire.

1.4.31. O sferă de lemn de masă $m = 1,00$ kg este așezată pe un suport inelar. De jos în sus se trage un glonț de masă $m_0 = 10$ g și viteză $v_0 = 450$ m/s. Glonțul străpunge sfera, care saltă pînă la o înălțime $h = 0,90$ m. La ce înălțime urecă glonțul?

1.4.32. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s. În punctul de înălțime maximă el se dezintegrează în două fragmente. Fragmentul cu masa egală cu o fracțiune $f = 0,20$ din masa corpului cade vertical în jos și lovește Pămîntul cu viteza $v' = 20$ m/s. Cu ce viteză cade pe Pămînt cel de-al doilea fragment și după cît timp de la căderea primului?

1.4.33. Un corp de masă $m_1 = 1,00$ kg se mișcă cu viteza $v_1 = 6,0$ m/s și ajunge din urmă un corp de masă $m_2 = 3,0$ kg care se mișcă în același sens cu viteza $v_2 = 2,0$ m/s. Cu ce viteză se deplasează CM al corpurilor înainte și după ciocnire?

1.4.34. O moleculă de masă $m = 5,0 \cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mișcă cu viteza $v_1 = 500$ m/s în întîmpinarea unui piston care se mișcă cu viteza $v_2 = 2,00$ m/s și de care se ciocnește frontal perfect elastic. Aflați variația energiei cinetice și a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

1.4.35. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Aflați ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei 1 este transferată particulei 2, dacă ciocnirea este unidimensională: a) elastică, b) plastică, c) ce fracțiune se transformă în căldură în ciocnirea plastică? d) Cînd transferul de energie cinetică este maxim?

1.4.36. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg la capete. Care va fi accelerația centrului de masă al celor două corpuri?

1.4.37. Două stele se rotesc în jurul centrului de masă comun cu viteze constante în modul $v_1 = 10$ km/s, $v_2 = 20$ km/s și cu perioada $T = 100$ zile. Care sînt masele stelelor și distanța dintre ele? (Constanta gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N. m²/kg²)

1.4.38. Două corpuri de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg, legate printr-un fir orizontal de lungime $l = 1,00$ m, sînt puse în mișcare de rotație în planul orizontal cu turația $n = 1,00$ rot/s în jurul axei verticale care trece prin CM. Care va fi tensiunea din fir?

1.4.39. Un glonț de masă m străpunge o sferă de masă M suspendată de un fir și își micșorează viteza de $n = 3,0$ ori. Aflați între ce limite este cuprinsă fracțiunea din energia cinetică a glonțului transformată în căldură.

1.4.40. O particulă α de energie $E_1 = 5,0$ MeV lovește frontal perfect elastic un nucleu de cupru în repaus și ricoșează înapoi cu energia $E'_1 = 3,9$ MeV. Aflați raportul maselor m_{Cu}/m_α .

1.4.41. O bilă de lemn de masă $M = 1,00$ kg este suspendată de un fir. Un glonț de masă $m = 10$ g străpunge bila dacă viteza sa $v \geq v_0 = 300$ m/s. Ce viteză va căpăta bila dacă glonțul vine cu viteza $v = 500$ m/s?

1.4.42. Evaluați viteza maximă pe care o pot imprima unei mingi de ping-pong doi jucători dacă viteza maximă a paletelor este v_0 și fiecare jucător lovește mingea de 3 ori. Cît timp va fi necesar pentru aceasta, dacă lungimea mesei este l ?

1.4.43. Două bile de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg sînt suspendate pe fire paralele de lungime $l = 1,00$ m astfel încît bilele se ating. Prima bilă este deviată cu unghiul $\alpha_1 = 60^\circ$ și lăsată liber. Cu ce unghiuri deviază bilele dacă ciocnirea este: a) elastică, b) plastică, c) cîtă căldură se degajă în ciocnirea plastică?

1.4.44. Un corp de masă $M = 4,0$ kg cade liber de la o înălțime $H = 9,8$ m. La înălțimea $H/2$ corpul este lovit plastic de un corp de masă $m = 6,0$ kg cu viteza orizontală $v_0 = 9,8$ m/s. Aflați viteza sistemului la căderea pe Pămînt.

1.4.45. Un mic corp avînd viteza orizontală $v_0 = 10$ m/s cade într-o groapă de adîncime $h = 1,00$ m cu pereți paraleli transversali cu distanța $d = 5,0$ cm între ei, de care se ciocnește perfect elastic. Cîte ciocniri va suferi corpul cu pereți pînă ajunge la fund?

1.4.46. Un corp de masă $M = 1,00$ kg cade liber fără viteză inițială de la înălțimea $H = 7,00$ m (în vid). La înălțimea $h = 3,00$ m el este lovit plastic, orizontal, de un alt corp de masă $m = 1,00$ kg. După cît timp de la ciocnire corpurile ajung pe Pămînt?

1.4.47. La capătul unei scînduri de masă $M = 200$ g și lungime $l = 30$ cm care plutește pe apă șade o broască de masă $m = 100$ g. Cu ce viteză minimă față de apă trebuie să sară broasca pentru a nimeri exact la celălalt capăt al scîndurii?

1.4.48. La capătul unei bărci ușoare de lungime $l = 1,50$ m și masă $M = 20,0$ kg stă un om de masă $m = 60$ kg. Cu ce viteză minimă față de barcă (după desprinderea de barcă) trebuie să sară ca să ajungă la celălalt capăt al bărcii? Cît lucru mecanic efectuează omul?

1.4.49. Un atlet își ia avînt într-un timp $t = 3,0$ s și sare în lungime. Să se evalueze lungimea maximă posibilă a săriturii sale știind înălțimea maximă atinsă în timpul săriturii $h = 1,00$ m și coeficientul de frecare $\mu = 0,30$.

1.4.50. Un glonț de masă $m = 9,0$ g avînd viteza inițială $v_0 = 160$ m/s înclinată cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală, străpunge o sferă de lemn de masă $M = 300$ g așezată pe un suport inelar. Știind că glonțul atinge înălțimea maximă $h = 45$ m, ce înălțime maximă atinge sfera de lemn?

1.4.51. Un proiectil explodează în punctul superior al traiectoriei la înălțimea $h = 320$ m în două fragmente avînd raportul maselor $k = m_2/m_1 = 2,0$. Fragmentul mai greu cade exact sub verticala exploziei după timpul $\tau = 4,0$ s de la explozie, la distanța $s = 1200$ m de la locul lansării proiectilului. Aflați la ce distanță orizontală de la locul exploziei cade fragmentul mai ușor ($g = 10$ m/s²).

1.4.52. Din două puncte de la suprafața Pămîntului se aruncă unul spre altul sub unghiurile $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ în același plan vertical două corpuri din care primul cu viteza $v_1 = 12$ m/s, iar al doilea cu masa de $n = 2,0$ ori mai mare decît primul, astfel încît corpurile se ciocnesc plastic. Aflați viteza corpului rezultat la ciocnirea cu Pămîntul.

1.4.53. Un om de masă $M = 60$ kg stă pe gheața netedă fără frecări și aruncă orizontal de la înălțimea $h = 1,80$ m un corp de masă $m = 3,0$ kg care cade la o distanță (orizontală) $b = 9,0$ m de la locul aruncării. Aflați lucrul mecanic efectuat de om.

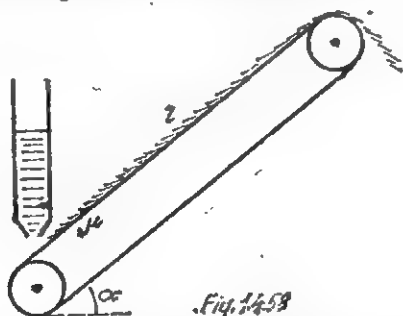
1.4.54. O bilă cade liber de la o înălțime $h = 4,0$ m. La suprafața Pămîntului ea lovește perfect elastic o placă fixă înclinată sub unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală. La ce înălțime se va ridica bila după ciocnire? La ce distanță de placă va cădea pe Pămînt?

1.4.55. Un vagon lovește frontal perfect elastic o minge aflată în repaus la marginea unei gropi care are adîncimea $h = 4,9$ m și lățimea $b = 4,0$ m. Ce viteză trebuie să aibă vagonul pentru ca mingea ciocnindu-se perfect elastic o singură dată cu podeaua gropii să ajungă la celălalt mal?

1.4.56. Pe un plan înclinat lunecă liber fără viteză inițială un corp. La vaza planului el ciocnește frontal, perfect elastic, un perete și urcă înapoi pe plan. Stiînd raportul dintre distanța de urcare și cea de coborîre $s_u/s_c = f = 0,50$, aflați raportul dintre timpul de urcare și timpul de coborîre.

1.4.57. Un corp lunecă fără viteză inițială pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ (cu orizontală). La baza planului el lovește perfect elastic un perete fix așezat transversal pe viteză, după care urcă înapoi în sus parcurgînd o fracțiune $f = 0,60$ din distanța de coborîre. Aflați coeficientul de frecare la lunecare.

1.4.58. O bandă rulantă de lungime $l = 2,50$ m și înclinată cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală urcă grăunțe care cad cu debitul $m^* = 1,00$ kg/s. Considerînd că viteza inițială a grăunțelor este zero și că ajung repede în repaus față de bandă, aflați forța minimă necesară pentru a trage în sus banda și viteza corespunzătoare a benzii.



1.4.59. O minge cade de la înălțimea $h = 1,00$ m și lovește perfect elastic de două ori un plan înclinat. Distanța dintre punctele de ciocnire este $l = 4,0$ m. Aflați unghiul de înclinare al planului.

1.4.60. O bilă lovește perfect elastic sub unghiul de incidență β un plan inclinat de unghi α . Pentru ce unghiuri β bila se întoarce exact în punctul inițial de impact?

1.4.61. Un săculeț cu făină alunecă liber, fără viteză inițială, de la o înălțime $h = 8,0$ m pe un plan inclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$. După coborîre, săculețul continuă mișcarea pe un plan orizontal, neracordat cu cel inclinat. Coeficientul de frecare este peste tot $\mu = 0,50$. La ce distanță de baza planului inclinat se va opri săculețul?

1.4.62. Un săculeț cu făină lunecă liber pe un plan inclinat de unghi $\alpha = 60^\circ$. Planul inclinat continuă neracordat cu un plan orizontal unde coeficientul de frecare este $\mu = 0,60$. Unde se va opri săculețul?

1.4.63. Un săculeț cu făină lunecă pe un plan inclinat de unghi α (cu orizontala) și ajunge la baza planului cu viteza v_0 . Planul inclinat continuă neracordat cu un plan orizontal pe care coeficientul de frecare la lunecare este μ . Să se demonstreze că dacă timpul de ciocnire al săculețului cu planul inclinat

$$\tau < \frac{v_0}{g} \left(\frac{1}{\mu} \cos \alpha - \sin \alpha \right).$$

atunci săculețul continuă mișcarea pe planul orizontal.

1.4.64. Un săculeț cu făină lunecă pe un plan inclinat de unghi α (cu orizontala). Planul inclinat continuă neracordat cu un plan orizontal unde coeficientul de frecare la lunecare este μ . Să se demonstreze că dacă $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$, săculețul se va opri sigur la baza planului.

1.4.65. Într-o pilnie cu deschiderea $2\sigma = 60^\circ$ și axă de simetrie verticală sare o bilă, ciocnindu-se de două puncte diametral opuse, situate la aceeași înălțime, la fiecare interval de timp $T = 1,00$ s. Aflați viteza maximă și cea minimă a bilei.

1.4.66. Un corp alunecă liber pe o distanță $s = 4,9$ m pe un plan inclinat de unghi $\alpha = 45^\circ$ cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,30$. La baza planului corpul se ciocnește elastic cu un perete transversal. Cît timp va dura mișcarea pînă la oprirea definitivă a corpului (neglijînd timpurile de ciocnire) și care va fi distanța totală parcursă?

1.4.67. Un mic corp alunecă liber fără frecări pe un plan inclinat de lungime $l = 0,80$ m și unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. După părăsirea planului inclinat corpul cade pe un plan orizontal situat cu $h = 0,90$ m mai jos, de care se ciocnește perfect elastic. La ce înălțime maximă urcă corpul?

1.4.68. Pe un plan inclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ cade vertical, fără viteză inițială, de la o înălțime $h = 1,00$ m, o bilă. Considerînd ciocnirea perfect elastică, aflați la ce distanță de-a lungul planului inclinat va lovi bila a doua oară planul inclinat.

1.4.69. Două bile sînt azvîrlite orizontal cu aceeași viteză peste un mic plan inclinat fix. Prima bilă lovește planul perfect elastic, iar a doua parțial elastic, anulîndu-se doar componenta normală a vitezei. Ce unghi trebuie să aibă planul pentru ca bilele să cadă la aceeași distanță de plan?

1.4.70. Pe un postament de masă $M = 1,00$ kg este prinsă de un fir de lungime $l = 75$ cm o bilă de masă $m = 200$ g. Deviem bila ca în figură și îi dăm drumul. Neglijînd frecările, aflați viteza postamentului în momentul cînd bila trece prin punctul inferior.

1.4.71. O bilă de oțel suspendată de o tijă subțire elastică, de masă neglijabilă, de lungime $l = 0,80$ m, este deviată pînă la orizontală și lăsată liberă. În punctul inferior bila ciocnește perfect elastic un perete

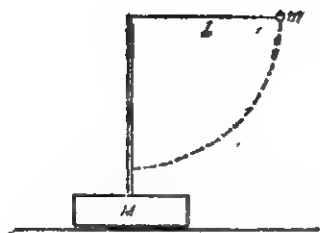


Fig. 1.4.72

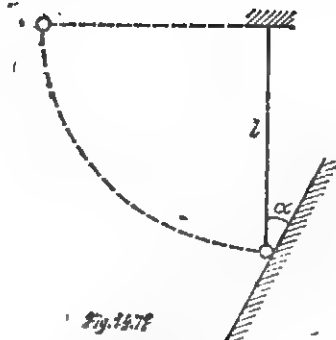


Fig. 1.4.73

încălinat cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ ca în figură. Până la ce înălțime se ridică bila după ciocnirea?

1.4.72. O sferă de masă $M = 1,00$ kg este suspendată de un fir de lungime $l = 0,80$ m. Firul este deviat cu unghiul $\alpha = 60^\circ$ și lăsat liber. Când sfera trece prin poziția de echilibru, ea ciocnește plastic o bilă de masă $m = 0,20$ kg care vine din sens opus sferei. Știind unghiul de deviere $\alpha' = 30^\circ$ a corpurilor, aflați viteza bilei.

1.4.73. O bilă suspendată de un fir de lungime $l = 0,80$ m se află la înălțimea $h = 30$ cm deasupra unei mese orizontale. Bila este deviată cu 90° și lăsată liber. Știind că firul rezistă până la o dată și jumătate din greutatea bilei, aflați la ce înălțime se va ridica bila după ciocnirea perfect elastică cu masa.

1.4.74. O bilă de masă $m = 100$ g, suspendată de un fir de lungime $l = 100$ cm, a fost deviată până la poziția orizontală a firului de suspensie și lăsată liber. În punctul inferior al traiectoriei bila lovește un corp de masă $M = 200$ g care parcurge o distanță $d = 200$ cm până se oprește, în timp ce bila ricoșează. Între ce limite este cuprins coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul M și planul orizontal?

1.4.75. Din practică se știe că este mai ușor să sări pe țărni de pe un șleap decît dintr-o barcă ușoară. De ce? Comparați în cele două cazuri lungimea săriturii omului și forța medie dezvoltată de om, considerînd că omul dezvoltă în ambele cazuri același lucru mecanic.

1.4.76. O bară de masă $m = 10,0$ kg execută o rotație completă în plan vertical în jurul unei axe transversale orizontale, trecînd printr-un capăt al barei. a) Dacă în punctul superior apăsarea asupra axei este egală cu greutatea barei, care va fi apăsarea în punctul inferior? b) Dar dacă sus apăsarea este zero?

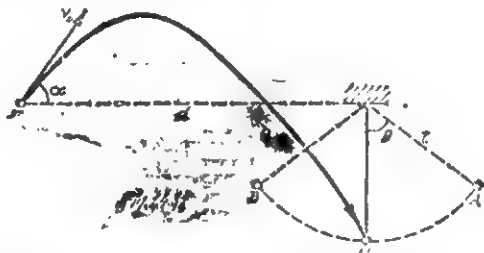
1.4.77. La periferia unui disc de rază $R = 0,40$ m și masă $M = 8,0$ kg este lipit un corp mic de masă $m = 100$ g. Cu ce viteză trebuie să se rostogolească (fără alunecare) discul pentru ca la fiecare rotație el să se desprindă de Pămînt?

(*) **1.4.78.** Două bile cu masele $m_{1/2}$ suspendate de fire paralele egale sînt deviate simetric și lăstate liber. Bilele se ciocnesc plastic. Aflați ce fracțiune din energia cinetică a bilelor se transformă în căldură. Pentru ce raport al maselor cantitatea de căldură va fi maximă?

1.4.79. Două bile mici de mase diferite suspendate pe fire paralele, se ating. Prima bilă este deviată (cu fir întins) pînă la o înălțime h_1 și apoi lăsată liber. În urma ciocnirii prima bilă se oprește, iar cealaltă deviază la o înălțime $h_2 < h_1$. Aflați pierderea relativă de energie cinetică prin ciocnire.

1.4.80. Două bile suspendate pe fire paralele se ating între ele. Una din bile este deviată și apoi lăsată liber. După ciocnirea perfect elastică, bilele se ridică la aceeași înălțime. Aflați raportul maselor. Dar dacă coeficientul de restituție este k ?

1.4.81. O sferă de masă M oscilează cu amplitudinea mică θ suspendată de un fir de lungime l . În momentul cînd sfera este într-o poziție extremă se aruncă o bilă de masă m dintr-un punct situat la aceeași înălțime cu punctul de suspensie al sferei la distanța d de aceasta, în planul de oscilație a sferei. Aflați viteza bilei și unghiul ei cu orizontala astfel ca bila să ciocnească plastic sfera în momentul trecerii ei prin poziția de echilibru și prin ruperea firului corpurile să cadă vertical.



1.4.82. Un corp de masă $m_1 = 300$ g lovește perfect elastic un alt corp de masă m_2 aflat inițial în repaus, după care ricoșează sub unghiul $\pi/2$ față de direcția inițială, cu viteza pe jumătate. Aflați masă m_2 .

1.4.83. Două bile de masă $m_1 = 0,200$ kg, $m_2 = 0,100$ kg se mișcă pe direcții perpendiculare cu vitezele $v_1 = 5,0$ m/s, respectiv $v_2 = 10,0$ m/s. După ciocnire bila m_2 se oprește. Aflați viteza primei bile după ciocnire și cantitatea de căldură degajată prin ciocnire. Trasați diagrama conservării impulsului.

1.4.84. Două corpuri cu masele $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 2,00$ kg se mișcă pe direcții perpendiculare, primul corp cu viteza $v_1 = 10,0$ m/s. După ciocnire primul corp se oprește. Ce cantitate de căldură s-a degajat prin ciocnire?

1.4.85. Un proiectil în repaus explodează în trei fragmente de masă $m_{1,2,3}$ cu energia cinetică totală E . Știind că direcțiile vitezelor formează între ele unghiuri $\alpha = 120^\circ$, aflați vitezele fragmentelor.

1.4.86. O particulă de masă m_1 lovește perfect elastic cu viteza v_0 o particulă de masă m_2 aflată în repaus. După ciocnire particula m_1 ricoșează sub un unghi drept față de direcția inițială. Știind viteza inițială v_0 , raportul maselor $r = m_2/m_1$, aflați vitezele finale și unghiul de recul al particulei m_2 .

1.4.87. O particulă de masă m_1 lovește cu viteza v_1 o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. După ciocnire direcțiile de mișcare ale particulelor formează unghiurile θ_1 , respectiv θ_2 cu direcția \vec{v}_1 . Aflați vitezele finale. Dacă $m_1 = m_2$ și ciocnirea este perfect elastică, arătați că $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$.

1.4.88. O particulă de masă m_1 lovește perfect elastic o altă particulă de masă m_2 aflată inițial în repaus, și este împrăștiată sub unghiul θ față de direcția inițială. Aflați: a) viteza finală v'_1 , b) pierderea (sau transferul) relativă de energie cinetică $f = -\Delta E_{c1}/E_{c1}$, c) pentru ce raport al maselor $r = m_2/m_1$, respectiv pentru ce unghi de împrăștiere θ , transferul de energie este maxim.

1.4.89. Două bile identice de masă $m = 200$ g fiecare stau pe un plan orizontal și se ating între ele. O altă bilă de aceeași rază le lovește central perfect elastic și se oprește. Aflați masa acesteia din urmă.

1.4.90. Două bile de mase $m_{1,2}$ și raze $R_{1,2}$, absolut netede și absolut elastice se ciocnesc ca în figură. Se cunosc vitezele $v_{1,2}$ și parametrul b . Aflați unghiul de împrăștiere θ a bilei m_1 . Aplicație numerică: $m_1 = m_2$, $\alpha = 30^\circ$, $v_2 = 2v_1$.

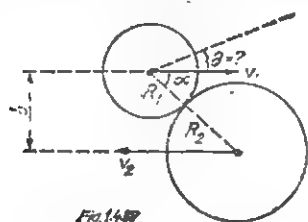


Fig. 1.4.89

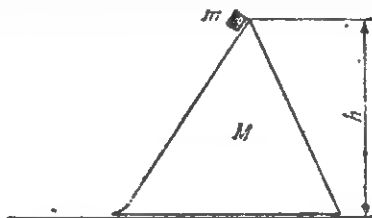


Fig. 1.4.91

1.4.91. Un corp de masă $m = 1,00$ kg coboară liber de la înălțimea $h = 1,10$ m pe o pană de masă $M = 10,0$ kg fără frecări, care poate aluneca pe un plan orizontal fără frecări, ca în figură. Ce viteză va avea pana când corpul părăsește pana? (jos pana este racordată neted cu orizontala).

1.4.92. Pe o pană netedă fără frecări, de masă M , așezată pe un plan orizontal fără frecări, alunecă liber de la înălțimea H un mic corp de masă m . Aflați distanța de la corp pînă la pană în momentul cînd corpul lovește planul orizontal (căzînd de la înălțimea h). Aplicație: $H_0 = 1,80$ m, $h = 0,80$ m, $m/M = 1/4$.

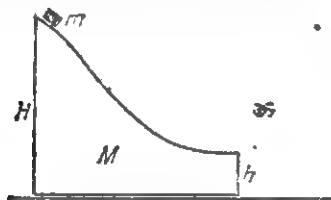


Fig. 1.4.92



Fig. 1.4.93

1.4.93. În figură cele două „movilițe” sînt identice, de înălțime $h = 1,00$ m și de masă $M = 4,0$ kg fiecare. Corpul mic $m = 1,00$ kg începe să coboare, după care urcă pe cealaltă „moviliță”. Toate frecările sînt neglijabile. La ce înălțime urcă corpul m ?

1.4.94. Un corp de masă $m = 1,00$ kg intră cu viteza orizontală $v_0 = 3,00$ m/s pe porțiunea cilindrică de rază $R = 20$ cm a corpului de

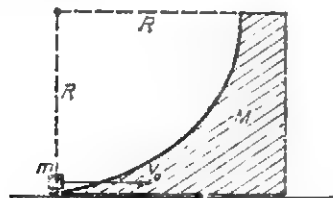


Fig. 1.4.94

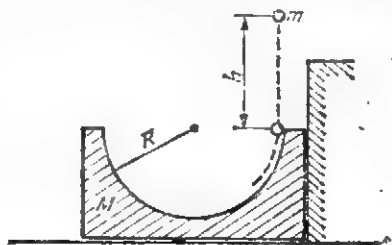


Fig. 1.4.95

masă $M = 10,0$ kg, așezat pe un plan orizontal. Neglijind toate frecările, aflați viteza corpului m la înălțimea R ($g = 10$ m/s²).

1.4.95. Care trebuie să fie înălțimea h de la care cade liber bila $m = 1,00$ kg, pentru ca ea să nu urce mai sus de marginea jgheabului semi-cilindric de rază $R = 40$ cm și masă $M = 4,00$ kg din figură. Frecările se neglijează.

1.4.96. O halteră formată din două bile identice legate printr-o tijă imponderabilă de lungime $l = 0,80$ m cade în poziție orizontală de la o înălțime $h = 1,00$ m, după care una din bile lovește perfect elastic marginea mesei, ca în figură. Ce distanță parcurge CM al halterei de la ciocnire până când a doua bilă lovește partea verticală laterală a mesei?

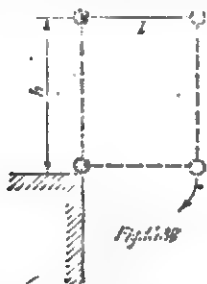


Fig. 1.4.96

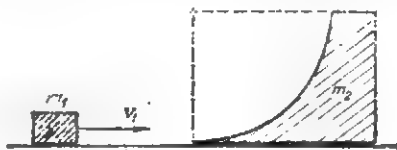


Fig. 1.4.97

1.4.97. O sanie de masă $m_1 = 40$ kg intră cu viteza $v_1 = 10,0$ m/s pe un suport de masă $m_2 = 60$ kg având forma de sfert de cerc ca în figură. Neglijind frecările și gravitația, aflați vitezele finale ale corpurilor.

1.4.98. O bilă de masă $m_1 = 90$ g, zburind orizontal cu viteza $v_1 = 5,0$ m/s lovește perfect elastic o prismă de masă $m_2 = 250$ g, aflată în repaus pe o masă orizontală fără frecări. După ciocnire bila zboară vertical în sus. Aflați vitezele corpurilor după ciocnire.

1.4.99. O bilă lovește perfect elastic cu viteza $v_1 = 2,00$ m/s sub un unghi de incidență $\alpha = 60^\circ$ un perete de masă mare care se mișcă spre. bilă cu viteza $v_2 = 1,00$ m/s sub unghiul $\beta = 30^\circ$ față de normala sa. Aflați unghiul de reflexie și viteza bilei după ciocnire (Se rezolvă întâi în SC legat de perete).

1.4.100. Un corp cu viteza orizontală $v_1 = 20,0$ m/s lovește perfect elastic un perete înclinat cu unghiul $\alpha = 45^\circ$ față de orizontală, care se mișcă cu viteza orizontală $v_2 = 10,0$ m/s. Aflați viteza finală a primului corp și unghiul ei cu orizontala.

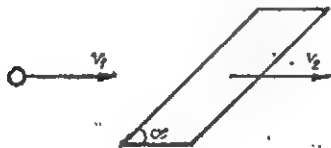


Fig. 1.4.100

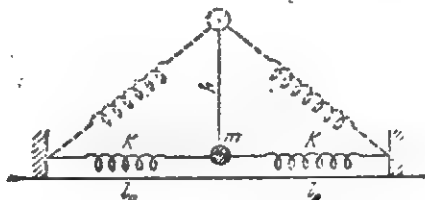


Fig. 1.4.101

1.4.101. Două bile de mase $m_1 = 2,0$ kg, $m_2 = 4,0$ kg, așezate pe un plan orizontal fără frecări, sint legate între ele printr-un fir și comprimiă între ele un resort care are energia potențială $E = 6,0$ J. Arzind firul, aflați vitezele bilelor.

1.4.102. O bilă de masă $m = 100$ g este fixată cu două resorturi identice de constantă $k = 15$ N/m fiecare, ca în figură. Inițial resorturile

sînt nedeformate și au lungimea $l_0 = 40$ cm fiecare. Ridicînd bila la înălțimea $h = 30$ cm i se dă drumul. Cu ce forță medie lovește podeaua dacă timpul de ciocnire este $\Delta t = 1,0$ ms?

1.4.103. În dispozitivul din figură între piston și cilindru fix forța de frecare la alunecare este $F_f = 10,0$ N; $m = 0,50$ kg, $M = 0,50$ kg, $k = 100$ N/m, $v = 2,00$ m/s. Aflați cu cît se deplasează pistonul în urma ciocnirii plastice.



Fig. 1.4.103



Fig. 1.4.104

1.4.104. În schema din figură corpurile sînt identice de masă $m = 1,40$ kg fiecare la distanța inițială $d = 0,98$ m între ele, resortul de constantă elastică $k = 40$ N/m este inițial nedeformat, coeficientul de frecare la alunecare este peste tot $\mu = 0,20$. Ce viteză trebuie imprimată corpului din stînga pentru ca cel din dreapta să revină înapoi în poziția inițială? Ciocnirea este perfect elastică.

1.4.105. O minge mică de tenis lovește perfect elastic cu viteza v_0 sub unghiul de incidență α o paletă masivă. Ce viteză de translație v trebuie să aibă paleta și sub ce unghi β față de normala sa pentru ca mingea să ricoșeze sub un unghi drept față de direcția inițială?

**** 1.4.106.** Asupra unui corp de masă m acționează o forță proporțională cu timpul: $F = At$. Aflați legea mișcării știind condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $v = v_0$ și $x = 0$.

**** 1.4.107.** Un lanț de lungime l și masă m este ținut inițial de capătul superior astfel încît capătul său inferior atinge o masă, apoi se lasă să cadă liber. Ce forță va exercita lanțul asupra mesei în timpul căderii și ce impuls total transmite el mesei?

1.5. MOMENTUL CINETIC

1.5.1. O scară neuniformă de lungime $l = 2,00$ m poate sta în echilibru sprijinită de un perete vertical pînă la un unghi minim $\alpha = 60^\circ$ format cu podeaua. Coeficienții de frecare la alunecare cu podeaua $\mu_1 = 0,30$ și cu perete $\mu_2 = 0,40$. Aflați înălțimea la care se află CM al scării.

1.5.2. Pe o scară dublă foarte ușoară articulată sus și legată printr-un fir la capetele inferioare, se suie un om de masă $m = 60$ kg pînă la mijlocul scării. Aflați tensiunea din fir, neglijînd toate frecările. Unghiul $\alpha = 60^\circ$.



Fig. 1.5.1

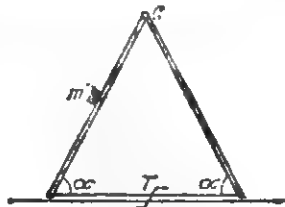


Fig. 1.5.2

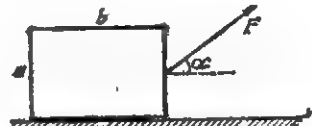


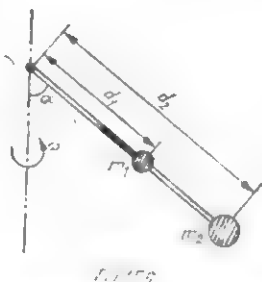
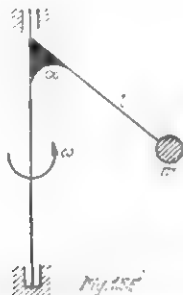
Fig. 1.5.3

1.5.3. O scară uniformă de masă $m = 4,00$ kg este sprijinită de un perete neted fără frecări, capătul inferior fiind așezat pe o podea cu frecare. Unghiul de înclinare al scării față de orizontală $\alpha = 60^\circ$. Ce forță se exercită asupra capătului inferior al scării și sub ce unghi față de orizontală?

1.5.4. O ladă cu dimensiunile $a = 1,50$ m și $b = 2,00$ m este ținută orizontal uniform cu o forță F sub unghiul α față de orizontală, ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,40$. Pentru ce unghi α lada începe să se ridice?

1.5.5. O tijă subțire rigidă de lungime $l = 1,00$ m este prinsă rigid sub un unghi $\alpha = 30^\circ$ de un ax vertical, ca în figură. La capătul tijei este prinsă o bilă de masă $m = 1,00$ kg. Sistemul se rotește cu turația $n = 1,00$ rot/s. Aflați reacțiunea bilei asupra tijei și momentul reacțiunii față de punctul de fixare de ax. Pentru ce perioadă de rotație acest moment este nul?

1.5.6. Pe o tijă de masă neglijabilă sînt fixate două bile de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,20$ kg la distanțele $d_1 = 0,50$ m, $d_2 = 1,00$ m de articulație, ca în figură. Tija se rotește cu viteza unghiulară $\omega = 5,1$ rad/s în jurul axei verticale trecînd prin articulație. Aflați unghiul de deviere al tijei.



1.5.7. O tijă subțire de masă neglijabilă are la capete două bile de mase $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 3,00$ kg. Tija este sprijinită la mijloc pe un reazem. Inițial tija este ținută în poziție orizontală, apoi se lasă liberă. Aflați apăsarea exercitată de tija pe reazem imediat ce tija este lăsată liber.

1.5.8. O scindură omogenă și uniformă de masă $m = 1,00$ kg și lungime $l = 1,00$ m este așezată pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,20$. La un capăt al scindurii se aplică o forță orizontală F perpendiculară pe scindură. Care este valoarea minimă a forței F necesară pentru ca scindura să se rotească și în jurul căruia punct se va roti atunci scindura?

1.5.9. O tijă omogenă și uniformă se află în interiorul unei sfere într-un plan meridian. Unghiul la centru determinat de tijă este $\theta = 60^\circ$, iar coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,20$. Ce unghi maxim față de orizontală poate avea tija?

1.5.10. O sîrmă de oțel fixată la un capăt, fiind răsucită la celălalt capăt cu unghiul θ generează un cuplu de forțe elastice cu momentul $M = C\theta$, unde $C = 4,0 \cdot 10^3$ N·m/rad este constanta de torsiune. Din această sîrmă se confecționează un resort spiralat de rază $R = 2,0$ cm și cu pasul mic ($h \ll R$). Calculați constanta elastică k a resortului obținut.

1.5.11. Asupra unui satelit artificial al Pământului acționează o forță de frecare $\vec{F} = -k\vec{v}$. Se conservă momentul său cinetic în raport cu centrul Pământului? Rămâne traiectoria plană?

1.5.12. Avem un pendul simplu gravitațional. a) Care este momentul cinetic al particulei față de verticala prin punctul de suspensie? b) Care este variația pe unitatea de timp a momentului cinetic al particulei în raport cu punctul de suspensie?

1.5.13. O minge de masă $m = 100$ g lovește perfect elast c cu viteza $v_0 = 20,0$ m/s un perete sub unghiul de incidență $\alpha = 30^\circ$. Calculați momentul cinetic al particulei față de un punct situat la distanța $s = 1,00$ m de perete pe normala la perete în punctul de ciocnire. Se conservă acest moment cinetic în procesul de ciocnire?

* **1.5.14.** O particulă este aruncată oblic în câmpul gravitațional terestru (în vid) cu viteza v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Care este momentul forței și momentul cinetic față de punctul de lansare? Verificați teorema momentului cinetic.

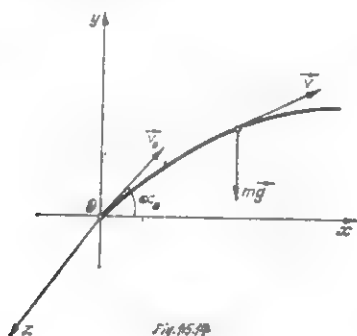


Fig. 1.5.14

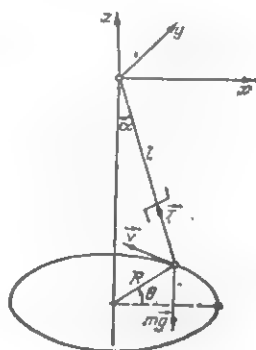


Fig. 1.5.15

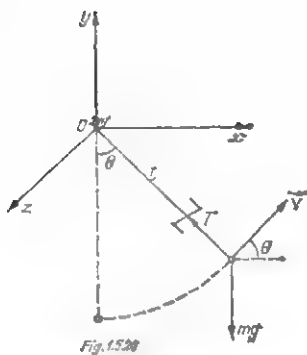
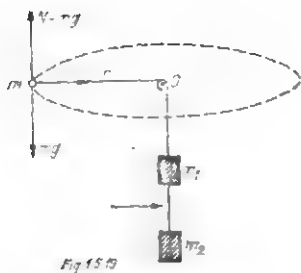
* **1.5.15.** La un pendul conic masa bilei $m = 100$ g, lungimea firului $l = 90$ cm, unghiul conului $2\alpha = 2 \cdot 60^\circ$. a) Calculați momentul forței și momentul cinetic al bilei față de centrul cercului și față de punctul de suspensie. b) Care este variația momentului cinetic pe unitatea de timp în ultimul caz? Verificați teorema momentului cinetic.

1.5.16. O particulă se mișcă liber, fără frecare, sub acțiunea forței de greutate pe suprafața interioară a unei sfere. Arătați că momentul cinetic al particulei în raport cu diametrul vertical al sferei se conservă.

1.5.17. Două particule de aceeași masă m se mișcă rectiliniu uniform cu viteze egale în modul dar de sens opus ($\vec{v}_0, -\vec{v}_0$) pe două drepte paralele. Arătați că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spațiu nu depinde de alegerea acestui punct.

1.5.18. O bilă de masă $m = 100$ g, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 0,60$ m execută o mișcare circulară uniformă pe o masă orizontală fără frecări cu turația $n_1 = 1,00$ rot/s. Ce turație va avea bila, dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 0,30$ m? Ce lucru mecanic a efectuat forța care a scurtat firul?

* **1.5.19.** O bilă de masă $m = 60$ g descrie o mișcare circulară uniformă într-un plan orizontal fără frecări (masa cu perna de aer), prinsă



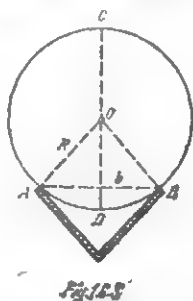
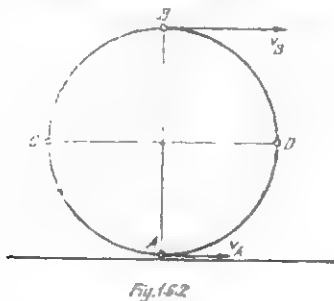
fiind de un fir ideal, trecut peste un mic scripete ideal în centrul cercului și avind la capăt două corpuri de mase $m_1 = 20 \text{ g}$, $m_2 = 20 \text{ g}$, legate unul după altul. La un moment dat se arde firul dintre corpurile $m_{1,2}$. Aflați tensiunea din fir și raportul în care crește raza de curbură a traiectoriei bilei imediat după arderea firului.

* 1.5.20. Avem un pendul simplu gravitațional. Care este momentul forței și momentul cinetic al particulei față de punctul de suspensie? Verificați teorema momentului cinetic.

1.6. MECANICA RIGIDULUI

1.6.1. Un exagon de latură l este rostogolit fără lunecare pe un drum orizontal cu viteză unghiulară ω constantă. Aflați traiectoria și viteza orizontală medie a centrului exagonului.

1.6.2. Un cerc de butoi se rostogolește cu lunecare astfel încît vitezele punctelor A , B sînt respectiv $v_{A,B}$. Aflați vitezele punctelor C , D .



1.6.3. Pe un jgheab de lățime b se rostogolește fără lunecare cu viteza v o sferă de rază R ca în figură. Aflați viteza maximă și minimă a punctelor sferei.

1.6.4. În sistemul din figură masa scripetelui $m = 200 \text{ g}$ este practic concentrată la periferie, $m_1 = 300 \text{ g}$, $m_2 = 500 \text{ g}$; firul nu alunecă pe scripete. Aflați tensiunile din fir.

1.6.5. Un cerc de butoi de rază $R = 1,00$ m, rostogolindu-se fără alunecare cu viteza $v = 10,0$ m/s pe un drum orizontal, lovește inelastic un prag de înălțime $h = 10,0$ cm, astfel încât componenta radială a vitezei (către vârful pragului) se anulează. Ce viteză va avea cercul după ce urcă pragul? Ce viteză minimă trebuie să aibă cercul pentru a putea urca pragul?

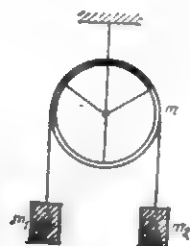


Fig. 1.6.5

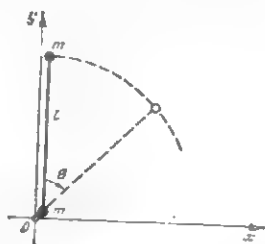


Fig. 1.6.7

1.6.6. Un cerc de butoi de lățime $b = 4,0$ cm are un mic orificiu de rază $r = 2,0$ mm de la un nit. Cercul este așezat vertical cu orificiul în jos. Datorită unei trepidatii cercul începe să se rostogolească fără lunecare. Aflați viteza maximă.

* **1.6.7.** O halteră sub forma a două bile punctiforme, de masă m fiecare, legate între ele printr-o tijă de masă neglijabilă și de lungime l , este așezată ca în figură, sprijinită de perete. Frecarea cu pereții este neglijabilă. Haltera începe să cadă. Aflați forțele de apăsare asupra halterei în momentul cind haltera face unghiul θ cu verticala.

1.6.8. Piese (plăcuțele) de domino de lungime $l = 4,0$ cm sînt așezate vertical în picioare una după alta la distanță mică ($\ll l$) între ele, formînd un șir din $N = 100$ plăcuțe. Dezechilibrînd prima plăcuță, ele cad una după alta. Evaluați în cît timp cade întreg șirul.

1.6.9. Un cilindru gol de masă M se rostogolește fără lunecare pe un plan inclinat de unghi α . Pe suprafața interioară a cilindrului luneacă fără frecări un mic corp de masă m . Aflați β .

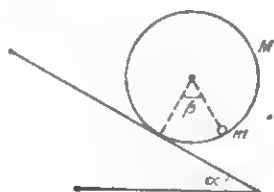


Fig. 1.6.9

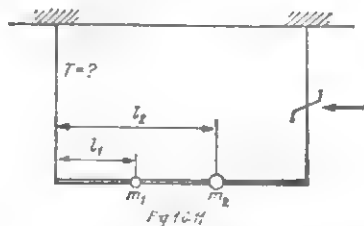


Fig. 1.6.11

1.6.10. Două bile de mase $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 3,00$ kg legate printr-un fir ideal de lungime $l = 0,40$ m se rotesc liber pe un plan orizontal neted în jurul centrului de masă cu viteza unghiulară $\omega = 10$ rad/s. Aflați energia cinetică a sistemului.

1.6.11. În sistemul din figură se cunosc masele $m_1 = 0,200$ kg, $m_2 = 0,400$ kg și distanțele $s_1 = 0,30$ m, $s_2 = 0,50$ m, tija are greutate neglijabilă. Aflați tensiunea din firul sting imediat ce se taie firul drept.

1.7. ECHILIBRUL MECANIC

1.7.1. În figură corpul de greutate $G = 100 \text{ N}$ este suspendat prin fire de doi pereți astfel încît tensiunea $T_1 = n G$, $n = 2,0$. Aflați tensiunea T_2 .

1.7.2. O sferă de masă $m = 10,0 \text{ kg}$ se află în echilibru în unghiul diedru de unghiuri $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, ca în figură. Frecările sînt neglijabile. Aflați forțele de reacțiune ale planelor.

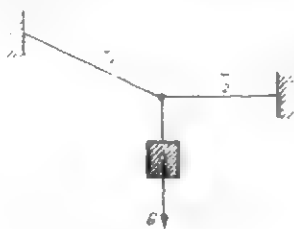


Fig. 17.1

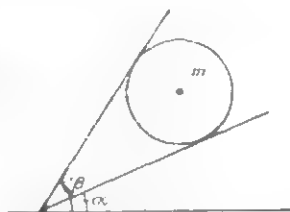


Fig. 17.2

1.7.3. O bilă de masă m , suspendată, se sprijină pe un plan înclinat fără frecări, ca în figură. Aflați reacțiunea planului. Aplicație: $m = 1,00 \text{ kg}$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

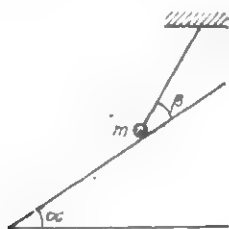


Fig. 17.3

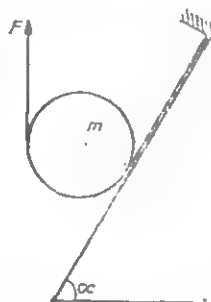


Fig. 17.4

1.7.4. Pe un plan înclinat fără frecări, de unghi $\alpha = 30^\circ$, este menținut în echilibru un cilindru neted de masă $m = 300 \text{ g}$, ca în figură. Aflați forța verticală F .

1.7.5. Aflați forța de forfecare care se exercită asupra nitului, atunci cînd capetele cleștelui sînt strînse cu o forță $F = 100 \text{ N}$.

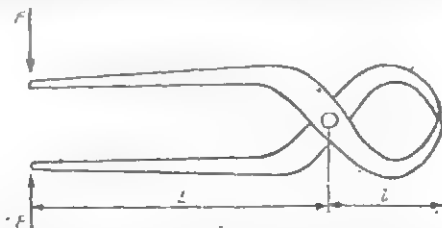


Fig. 17.5

1.7.6. O tijă a fost îndoită la mijloc în unghi drept cu brațe egale și suspendată liber de un capăt. Aflați unghiul format de jumătatea superioară cu verticala.

1.7.7. O scindură omogenă și uniformă de masă $M = 4,0$ kg este așezată pe o masă astfel încât o fracțiune $f = 1/4$ din lungimea sa depășește spre exterior marginea mesei. Aflați masa corpului ce trebuie așezat la capătul exterior al scindurii pentru ca aceasta să se răstoarne.

1.7.8. În sistemul din figură se dau: $l = 80$ cm, resorturile sînt inițial nedeformate și au aceeași lungime; $d = 20$ cm. Aflați raportul k_1/k_2 , dacă bara are poziție orizontală în starea finală.

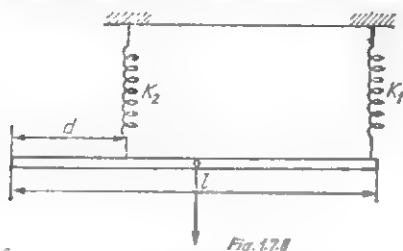


Fig. 17.8

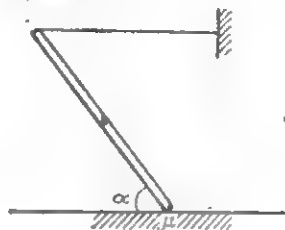
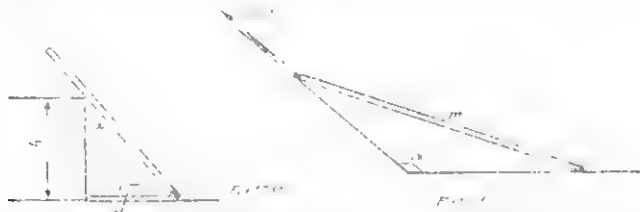


Fig. 17.9

1.7.9. O bară este sprijinită ca în figură. Pentru ce valori α bara va fi în echilibru, dacă coeficientul de frecare $\mu = 0,50$?

1.7.10. O bară uniformă de masă $m = 60$ kg și lungime $l = 4,0$ m se sprijină ca în figură. Frecările sînt neglijabile, $\alpha = 30^\circ$, $h = 3,0$ m. Aflați tensiunea din fir.



1.7.11. O bară omogenă și uniformă de masă $m = 4,0$ kg se sprijină pe laturile unui unghi diedru $\alpha = 150^\circ$ ca în figură. Cit este forța F la echilibru? Toate frecările sînt neglijabile.

1.7.12. De un perete neted se sprijină o scară uniformă de masă $m = 10$ kg formînd un unghi $\alpha = 45^\circ$ cu podeaua rugoasă. Aflați forța de frecare dintre scară și podea.

1.7.13. Un bloc paralelipipedic omogen de masă m și de lățime b stă sprijinit pe două perechi de piciorușe mici ca în figură, pe un plan orizontal cu coeficienții de frecare μ_1 , respectiv $\mu_2 < \mu_1$. Aflați forța minimă necesară pentru a urni din loc blocul.

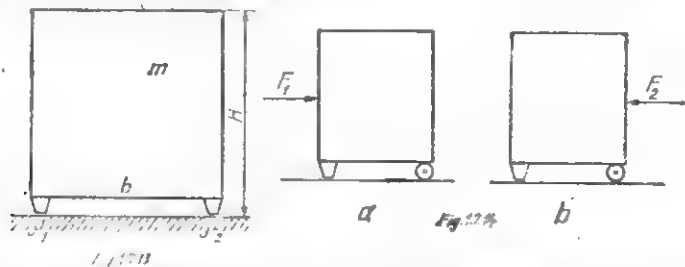


Fig. 17.13

1.7.14. Un container de forma unui cub omogen are pe o latură role (frecări neglijabile), iar pe latura opusă pinteni, ca în figură. Pentru a-l deplasa orizontal de la pinteni spre role, trebuie împins cu o forță F ,

aplicată în centrul feței, iar în sens invers cu o forță F_2 . Aflați masa conținutului.

1.7.15. În sistemul din figură se cunosc m , α . Aflați coeficientul de frecare minim necesar pentru echilibru și tensiunea din fir la echilibru.

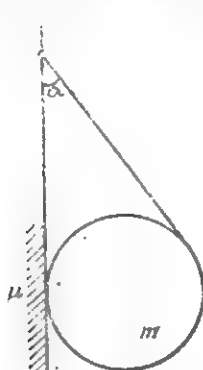


Fig. 1.7.15

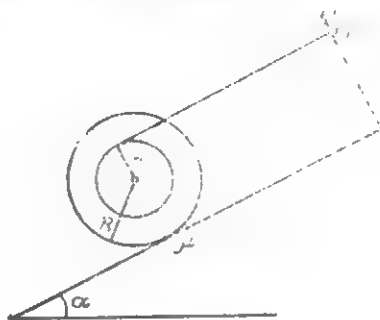


Fig. 1.7.16

1.7.16. Care trebuie să fie coeficientul minim de frecare la alunecare dintre moșor și planul înclinat pentru ca moșorul să stea în echilibru? Aplicație: $\alpha = 45^\circ$, $r = 3,0$ cm, $R = 7,0$ cm.

1.7.17. Un moșor este suspendat ca în figură. Se dau $\mu = 0,40$, $r = 10$ mm, $R = 50$ mm. Pentru ce valori α moșorul nu cade?

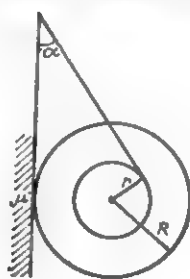


Fig. 1.7.17

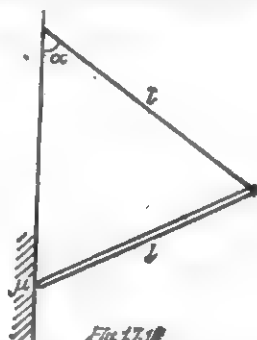


Fig. 1.7.18

1.7.18. O bară omogenă și uniformă este suspendată printr-un fir ideal ca în figură. Aflați unghiurile α pentru care bara este în echilibru. Coeficientul de frecare la alunecare între bară și perete este $\mu = 0,30$.

1.7.19. Un cub de masă m așezat pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare μ este tras de o forță F sub unghiul α , ca în figură. Reprezentați în planul $(F/(mg), \mu)$ regiunile pentru care cubul este în repaus (α este fixat).

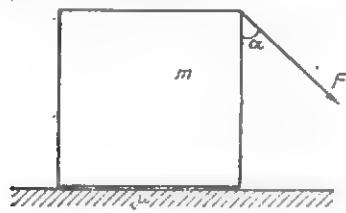


Fig. 1.7.19

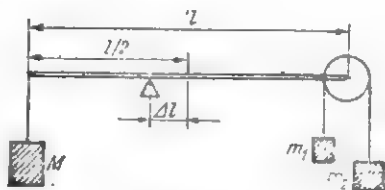


Fig. 1.7.20

1.7.20. În sistemul din figură se dau $M = m_1 + m_2 = 200$ g, scripetele este mic și ideal, tija are masă neglijabilă și $l = 42$ cm. În timpul mișcării corpurilor $m_{1,2}$ echilibrul tijei se obține dacă $\Delta l = 3,0$ cm. Aflați masele $m_{1,2}$.

1.7.21. Între doi pereți paraleli cu distanța $d = 1000$ mm între ei se „bate” o scindură de greutate neglijabilă într-un plan perpendicular comun al pereților, ca în figură. Unghiul de frecare dintre scindură și pereți $\varphi = 9,0^\circ$. Aflați lungimea maximă a scindurii pentru a se putea autobloca.

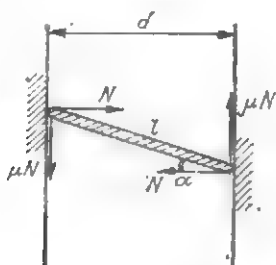


Fig. 1.7.21

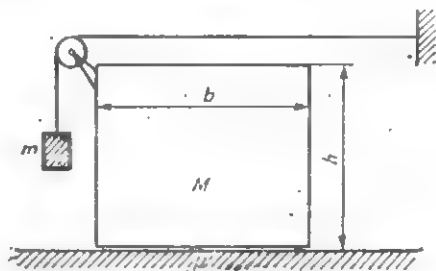


Fig. 1.7.22

1.7.22. Se dă montajul din figură. Pentru ce valori m paralelipipedul M va aluneca fără să se răstoarne? Discuție.

1.7.23. Aflați forța minimă necesară pentru a răsturna un cub de masă m în jurul unei muchii. Care trebuie să fie coeficientul de frecare μ pentru ca cubul să nu alunece?

1.7.24. Pe un plan înclinat de unghi α stau unul peste altul două cuburi identice. Coeficientul de frecare dintre cuburi este μ , iar între cubul inferior și planul înclinat frecarea este suficient de mare. Se crește lent unghiul α al planului. Ce se întâmplă cu cuburile? Discuție.

1.7.25. O roată dela o căruță s-a turtit într-o parte ca în figură. Pentru ce valori ale coeficientului de frecare la alunecare roata va aluneca în loc să se rotească (rostogolească)? Raza $R = 1,0$ m, $b = 10$ cm.

1.7.26. Două șipci de lungimi $l_{1,2}$ și mase $m_{1,2}$ sunt unite în unghi drept, așezate pe un plan rugos cu coeficienții de frecare $\mu_{1,2}$ și trase orizontal de unghiul drept, ca în figură. Aflați unghiul α .

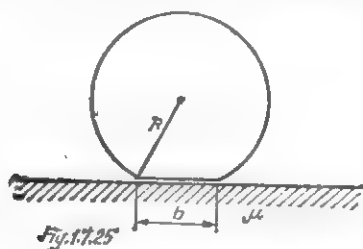


Fig. 1.7.25

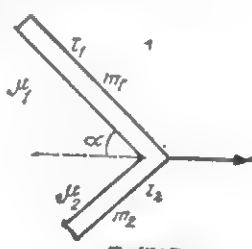


Fig. 1.7.26

1.7.27. Teul din figură, format din brațele $l_{1,2}$, cu masele $m_{1,2}$ și coeficienții de frecare $\mu_{1,2}$ este tras orizontal pe o suprafață plană orizontală. Aflați unghiul α .

1.7.28. O placă pătratică este formată din două jumătăți omogene și uniforme de mase $m_{1,2}$. Placa este așezată pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la alunecare μ . De placă se trage orizontal cu o forță aplicată în capătul liniei mediane care separă jumătățile $m_{1,2}$. Ce unghi

trebuie să formeze forța cu această linie pentru ca placa să se miște prin translație? Aplicație: $m_1 = 2m_2$.

**** 1.7.29.** Peste un cilindru absolut neted, orizontal, fix, de rază R , este trecut un lanț de lungime l și masă m , aflat în echilibru. Aflați tensiunea din lanț în funcție de unghiul θ la centru.

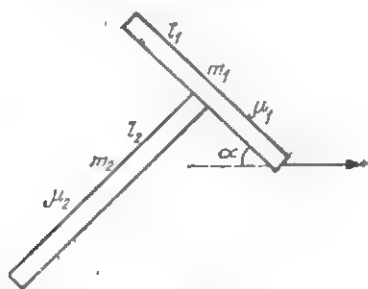


Fig. 1.7.27

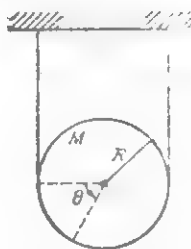


Fig. 1.7.30

**** 1.7.30.** Cu ajutorul unui lanț de lungime l și masă m este suspendat un butoi cilindric de rază R și masă M , ca în figură. Aflați tensiunea din lanț în funcție de unghiul θ la centru.

**** 1.7.31.** Calculați momentul de inerție al unei tije subțiri de lungime l și masă m față de o axă transversală care trece prin: a) mijlocul tijeii, b) un capăt al tijeii.

**** 1.7.32.** Fie o figură (placă) plană. Alegem în planul plăcii două axe perpendiculare între ele Ox, y și axa Oz perpendiculară pe planul plăcii.

a) Stabiliți relația dintre cele 3 momente de inerție $I_{x,y,z}$ respectiv față de axele de coordonate Ox, y, z . b) Calculați momentele de inerție ale unei coroane circulare omogene de masă m și raze R_1, R_2 .

**** 1.7.33.** Calculați momentele de inerție față de axele de simetrie ale unui cadru (ramă) subțire dreptunghiular, omogen și uniform, de masă m și laturi a, b .

**** 1.7.34.** Calculați momentul de inerție al plăcii dreptunghiulare de masă m și laturi a, b , față de axele de simetrie.

**** 1.7.35.** Calculați momentele de inerție ale unui paralelipiped dreptunghic, omogen, de masă m și laturi a, b, c , față de axele de simetrie.

**** 1.7.36.** Calculați momentul de inerție al unei plăci cilindrice omogene de masă m și raze R_1, R_2 .

**** 1.7.37.** Calculați momentul de inerție al unei plăci sferice omogene de masă m și raze R_1, R_2 față de un diametru.

**** 1.7.38.** Momentul forțelor de frecare într-un lagăr este proporțional cu viteza unghiulară: $M_f = -k\omega$. Știind că sub acțiunea unui moment rotitor $M = 1,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$, rotorul cu momentul de inerție $I = 20,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, atinge turația limită (maximă) $n_0 = 1200 \text{ rot/min}$, aflați după cât timp rotorul atinge o fracțiune $f = 99\%$ din această turație și câte rotații face în acest timp.

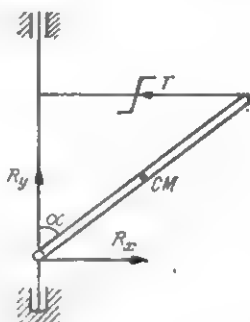
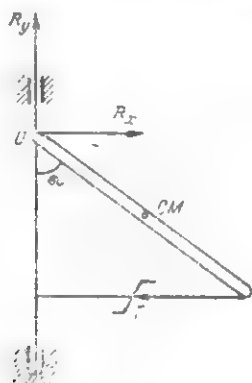
**** 1.7.39.** O placă subțire omogenă dreptunghiulară de masă $m = 300 \text{ g}$ și de dimensiuni $b = 40 \text{ cm}$, $h = 1,25 \text{ m}$, se rotește în jurul laturii sale de lungime b așezate vertical. Fiecare element de suprafață al plăcii împinge din partea aerului o forță de rezistență (normală pe placă) proporțională cu aria elementului și cu pătratul vitezei sale. Cunoscând turația inițială $n_0 = 10,0 \text{ rot/s}$ a plăcii și timpul $\tau = 1,00 \text{ s}$ în care această turație se reduce la jumătate, calculați: a) momentul de inerție al plăcii

față de axa de rotație, b) constanta de proporționalitate din legea amintită a forței de rezistență, c) numărul de rotații efectuate de placă în timpul amintit τ .

**** 1.7.40.** O bară subțire omogenă și uniformă, de lungime l și masă m , se rotește uniform cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix. a) Calculați tensiunea elastică din bară la distanța x de capătul fix și reacțiunea R a lagărului. b) Cunoscând secțiunea S a barei și modulul de elasticitate E , aflați alungirea barei.

**** 1.7.41.** O tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime l și de masă m , se rotește într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix. Aflați rezultanta forțelor aplicate tijei în momentul cînd viteza unghiulară a tijei este ω și accelerația unghiulară ϵ .

**** 1.7.42.** O tijă omogenă și uniformă, de lungime l și masă m , este prinsă la un capăt printr-o articulație (ideală) de o axă verticală într-o poziție înclinată cu unghiul α , celălalt capăt al tijei fiind legat printr-un fir orizontal de axă. Tija se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ în jurul axei verticale. Calculați tensiunea din fir și reacțiunea \vec{R} a articulației asupra tijei în cele două variante din figură.



**** 1.7.43.** O placă plană subțire, neomogenă și neuniformă, de masă m , se rotește în jurul unei axe fixe perpendiculare pe placă. Se cunoaște distanța centrului de masă CM pînă la axa de rotație R_0 și momentul de inerție I_0 al plăcii față de axa centrală, normală la placă. Aflați rezultanta forțelor externe aplicate plăcii în momentul cînd are viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ϵ .

**** 1.7.44.** Un fragment de cere de butoi de rază R este suspendat simetric pe un cui bătut în perete. Aflați perioada micilor oscilații în planul paralel cu peretele.

(*) 1.7.45. O bară subțire, omogenă și uniformă, de lungime l este suspendată la distanța x de centrul barei. Pentru ce distanță x perioada micilor oscilații ale barei în planul vertical este minimă?

*** 1.7.46.** Un pendul fizic de masă m , moment de inerție I față de axa de suspensie și distanța R_0 a CM pînă la axa de suspensie, oscilează cu amplitudinea unghiulară α . Exprimați în funcție de unghiul de deviere θ : a) viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale pendulului, b) forța exercitată de pendul asupra axului de suspensie, c) particularizați rezultatele pentru cazul unei tije subțiri, omogene și uniforme.

**** 1.7.47.** O bară omogenă și uniformă de greutate G se sprijină cu un capăt pe podea fără frecare, formind un unghi α cu podeaua. Aflați pentru momentul când bara începe să cadă pornind din repaus: a) forța exercitată de bară asupra podelei, b) accelerația CM , c) accelerația unghiulară, d) Aflați traiectoria capătului superior al barei, e) viteza unghiulară a barei în funcție de unghiul θ format de bară cu podeaua.

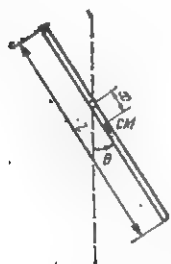


Fig. 17.45

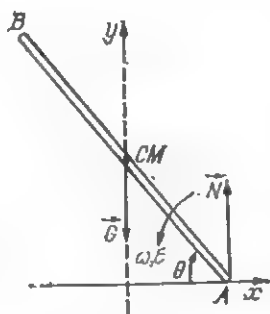


Fig. 17.47

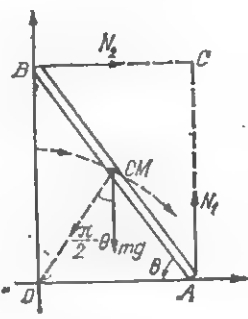


Fig. 17.48

**** 1.7.48.** O bară omogenă și uniformă, de lungime l și masă m , alunecă fără frecare cu capetele sale pe o podea și pe un perete vertical. Inițial bara este în repaus formind un unghi α cu podeaua. Aflați în funcție de unghiul θ : a) viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale barei, b) reacțiunile peretelui și podelei, c) unghiul θ_0 în momentul când bara se desprinde de perete, d) reacțiunea podelei și accelerația CM al barei în acest moment, e) viteza unghiulară a barei după desprinderea de perete.

**** 1.7.49.** Un disc omogen de rază R , ținut orizontal și pus în rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară ω_0 este așezat pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la alunecare μ . Considerind că presiunea exercitată de disc pe plan este uniformă, aflați după cât timp discul se oprește și câte ture efectuează până la oprire.

**** 1.7.50.** Un pendul conic este format dintr-o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime l , care se rotește în jurul axei verticale formind un unghi α cu verticala, capătul superior fiind prins într-o articulație ideală fără frecări. Aflați viteza unghiulară și reacțiunea articulației asupra tijei. Pentru ce turație tija începe să devieze?

**** 1.7.51.** Un lanț greu, omogen și uniform, de lungime l și greutate G , este suspendat de capete în două puncte situate pe aceeași orizontală. a) Aflați ecuația curbei pe care o ia lanțul, b) cunoscând și săgeata f , aflați tensiunea în lanț în punctul cel mai de jos, precum și la capete. c) Considerind că verigile de la capetele lanțului alunecă pe o tijă orizontală cu unghiul de frecare φ , aflați distanța maximă posibilă dintre capetele lanțului în echilibru.

**** 1.7.52.** O bară omogenă și uniformă, de lungime l , secțiune S și masă m este suspendată la capătul superior. Aflați alungirea barei datorită propriei greutăți. Se dă modulul de elasticitate E .

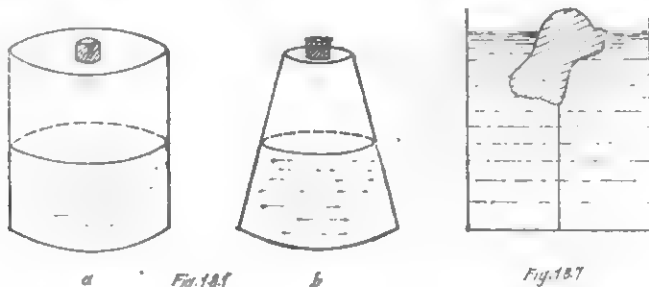
**** 1.7.53.** O bandă de oțel de lungime l , lățime b și grosime h este curbată într-un arc de cerc de rază R . Cunoscând modulul de elasticitate E și considerind deformările elastice, calculați lucrul mecanic necesar,

Hidrostatica

1.8.1. Două butoaie, unul cilindric, celălalt tronconic, de aceeași înălțime, umplute până la jumătatea înălțimii cu apă, sint astupate la capacul superior prin dopuri identice. Pentru a-le transporta muncitorul le-a răsturnat și atunci la unul din butoaie dopul a sărit. La care? De ce?

1.8.2. Un vas plutește pe un lac de acumulare. Ce se întâmplă cu nivelul apei din lac dacă de pe vas se aruncă în apă: 1) bușteni de lemn, 2) bare de metal?

1.8.3. O sferă de metal plutește într-un vas cu mercur. Se toarnă apă peste mercur astfel încît să acopere sfera. Se va cufunda sau se va ridica sfera? De ce?



1.8.4. Într-un pahar cu apă plutește o bucată de gheață. Peste apă se toarnă un strat de ulei. Crește sau scade nivelul uleiului și al apei după topirea gheții?

1.8.5. Știind că suprafața oceanelor reprezintă $2/3$ din suprafața globului și că adâncimea medie a oceanelor $h = 4,0$ km, aflați cu cât ar crește presiunea atmosferică dacă toată apa oceanelor s-ar evapora.

1.8.6. Un manșon tronconic de masă m este așezat etanș pe o masă. Raza bazei este R . Se toarnă apă în interior până manșonul se desprinde. În acest moment nivelul apei este h . Aflați masa apei.

1.8.7. Într-un vas cu apă, de secțiune $S = 100 \text{ cm}^2$, plutește o bucată de gheață prinsă printr-un fir de fundul vasului. Tensiunea din fir este $F = 10,0 \text{ N}$. Aflați cu cât se schimbă nivelul apei din vas prin topirea gheții.

1.8.8. O bucată de gheață de arie $S = 150 \text{ cm}^2$ și grosime constantă plutește pe apă ieșind deasupra apei cu $h = 2,0$ cm. Care este masa gheții? ($\rho_g = 920 \text{ kg/m}^3$)

1.8.9. Ce greutate trebuie pusă pe un paralelipiped de gheață de arie $S = 1,00 \text{ m}^2$ și grosime $h = 20$ cm pentru a-l cufunda complet în apă?

1.8.10. Un butoi gol plutește pe apă. Pentru a astupa fisuri din fundul butoiului se căptușește fundul (pe dinăuntru sau pe din afară) cu un strat de plastic de grosime $d = 30$ mm. Din această cauză butoiul se scufundă în plus cu $h = 18$ mm. Aflați densitatea plasticului.

1.8.11. Un corp cântărește în aer $G = 3,00 \text{ N}$, în apă $G_a = 1,80 \text{ N}$ și într-un lichid necunoscut $G_l = 2,04 \text{ N}$. Care este densitatea lichidului?

1.8.12. Într-un vas cu apă plutește o bilă de lemn. Se scufundă sau se ridică bila dacă vasul urcă cu accelerația a ? Pentru a cufunda complet

în apă se apasă bila cu o anumită forță F . În ce raport se schimbă această forță dacă vasul urcă cu accelerația a ?

1.8.13. Un balon cu gaz, de volum $V = 600 \text{ m}^3$, se află în echilibru în aer. Ce cantitate de balast trebuie aruncată peste bord, pentru ca balonul să urce cu accelerația $a = 0,10 \text{ m/s}^2$? Densitatea aerului $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$.

1.8.14. Un vas cilindric de arie transversală S este umplut cu un lichid și închis cu un piston etanș (fără frecări) care are în centru un dop de arie s . Forța de frecare maximă între dop și piston este F_f . Cu ce forță minimă trebuie să apăsăm pe dop pentru a-l expulza în lichid? Se neglijează forțele, de greutate.

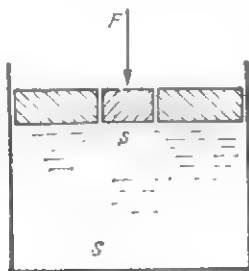


Fig. 1.8.14

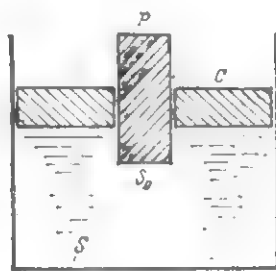


Fig. 1.8.15

1.8.15. Într-un cilindru de rază R este un lichid de densitate ρ . Cu cât crește nivelul lichidului dacă lăsăm să plutească un paralelipiped de masă m ?

1.8.16. Un corp cilindric suspendat de un dinamometru este introdus în lichidul dintr-un pahar cilindric, astfel încât nivelul lichidului crește cu $\Delta h = 80 \text{ mm}$. Indicația dinamometrului se schimbă cu $\Delta F = 0,50 \text{ N}$. Aflați aria secțiunii vasului.

1.8.17. În două vase cilindrice comunicante cu aceeași secțiune transversală $S = 100 \text{ cm}^2$ se află Hg. Într-unul din vase se toarnă apă de masă $m = 20 \text{ kg}$ și se lasă să plutească un corp de masă $m_1 = 7,2 \text{ kg}$. Cu ce distanță h se deplasează nivelul mercurului în celălalt vas?

1.8.18. O presă hidraulică cu apă are ariile pistoanelor $S_1 = 100 \text{ cm}^2$ și $S_2 = 10 \text{ cm}^2$. Pe pistonul mare se așează un om cu masa $m = 80 \text{ kg}$. Cu cât coboară omul?

1.8.19. În figură pistonul P și cilindrul C sînt în echilibru, putîndu-se deplasa etanș fără frecări. Se cunosc S , S_0 și ρ . Cu cât se va cufunda cilindrul (față de poziția sa inițială) dacă peste el punem un corp de masă m ?

1.8.20. Într-un pahar cu apă de secțiune S plutește un manșon cilindric de lemn cu secțiunea interioară s . Ținînd fix manșonul, se toarnă în cavitatea sa cilindrică interioară un strat de ulei de densitate ρ și grosime h , apoi se lasă manșonul liber. Cu cât se ridică nivelul apei din pahar și cu cât se schimbă înălțimea de scufundare a manșonului în apă?

1.8.21. Pe fundul unui vas cu apă stă un disc de diametru $D = 30 \text{ cm}$ și grosime $h = 5,0 \text{ mm}$ (densitatea discului $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$). Pentru a-l ridica s-a introdus un tub de diametru $d = 10 \text{ cm}$ strîns (etanș) atașat de disc, din care s-a evacuat apa. Pînă la ce adîncime de la suprafața apei la baza discului se va ridica discul?

1.8.22. Un areometru este format dintr-un balon cu alicie continuat cu un tub cilindric subțire de secțiune S . Masa totală a areometrului

$m = 3,00$ g. Ce înălțime Δh este între două diviziuni consecutive cu $\Delta \rho = 0,010$ g/cm³ în vecinătatea diviziunii $\rho = 1,23$ g/cm³?

1.8.23. În vase comunicante cu mercur s-a turnat într-unul o coloană $h_1 = 30$ cm de ulei cu $\rho_1 = 900$ kg/m³, iar în celălalt o coloană $h_2 = 20$ cm apă. Aflați denivelarea mercurului.

1.8.24. O sferă omogenă de densitate ρ pluteste la suprafața de separație dintre două lichide nemiscibile de densități ρ_1, ρ_2 . Ce fracțiune din volumul sferei se află în lichidul superior?

1.8.25. Sub un clopot se află un tub barometric atârnat de un dinamometru și cufundat cu capătul inferior într-un vas cu mercur. În clopot se face treptat vid. Arătați cum variază torța arătată de dinamometru în funcție de înălțimea coloanei de mercur din tub.

**** 1.8.26.** Într-un vas cilindric vertical de înălțime h densitatea lichidului crește proporțional cu adâncimea la pătrat: $\rho \sim x^2$. La ce adâncime trebuie așezată o placă orizontală astfel încât deasupra și dedesubtul ei să fie mase egale de lichid?

1.8.27. Într-un vas cu un lichid de densitate $\rho_0 = 1000$ kg/m³ se sprijină liber cu un capăt pe marginea vasului o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime $l = 100$ cm și densitate $\rho = 910$ kg/m³, celălalt capăt fiind cufundat în lichid. Înălțimea capătului superior al tijei față de nivelul lichidului este $h = 15$ cm. Aflați: a) lungimea porțiunii de tijă cufundată în lichid, b) unghiul format de tijă cu suprafața lichidului, c) coeficientul de frecare la rulmentare dintre tijă și marginea vasului, minim necesar pentru ca tija să nu lungeze.

1.8.28. O tijă uniformă și omogenă de masă $m = 4,4$ g este așezată în echilibru pe marginea unui vas cu apă, având la un capăt atârnată o bilă de aluminiu de volum $V = 0,52$ cm³, cufundată pe jumătate în apă, ca în figură. Aflați raportul brațelor b_1, b_2 .

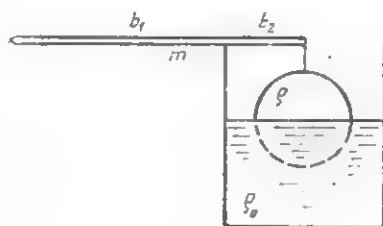


Fig. 1.8.28

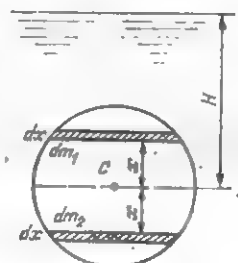


Fig. 1.8.30

1.8.29. Densitatea unei soluții de sare variază cu adâncimea după legea $\rho = \rho_0 + Ah$, unde $\rho_0 = 1,00$ g/cm³, $A = 20$ mg/cm⁴. În soluție sînt cufundate două bile legate între ele printr-un fir, avînd masele $m_1 = 0,13$ g, $m_2 = 0,34$ g și volumele $V_1 = 0,10$ cm³, $V_2 = 0,20$ cm³. La echilibru prima bilă este cufundată pînă la adâncimea $h_1 = 20$ cm. Aflați tensiunea din fir și lungimea firului.

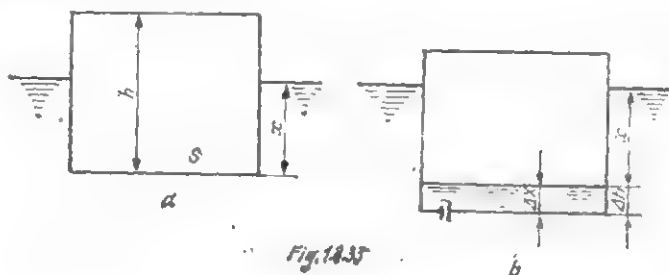
() 1.8.30.** Un cub de volum V și masă m se află în echilibru, complet cufundat într-un lichid a cărui densitate variază cu adâncimea după legea $\rho = \rho_0 + kh$. Aflați la ce adâncime este centrul cubului. Dar în cazul sferei de același volum și masă?

**** 1.8.31.** Un cilindru vertical de rază $R = 10$ cm este umplut pînă la refuz cu un lichid de densitate $\rho = 1000$ kg/m³ și închis cu un capac. La baza cilindrului în peretele lateral este un dop de masă $m = 5,0$ g

și de arie transversală $S = 4,0 \text{ cm}^2$. Pentru a scoate dopul trebuie aplicată o forță $F = 25 \text{ N}$. La ce rotație a cilindrului în jurul axei proprii verticale, dopul va sări?

1.8.32. O bilă de densitate $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ lăsată liberă într-un lichid de densitate $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ atinge o viteză limită $v_0 = 10,0 \text{ m/s}$, întimpinând o forță de rezistență proporțională cu viteza. Două bile de acest fel sînt legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal, una din bile fiind cufundată în lichidul de mai sus. Aflați viteza limită a bilelor.

1.8.33. Un cilindru cu pereți subțiri, închis ermetic și umplut cu gaz, pluteste pe apă. Masa cilindrului cu gaz este $m = 20,0 \text{ kg}$, înălțimea $h = 1,00 \text{ m}$ și aria bazei $S = 0,20 \text{ m}^2$. În urma fisurării bazei cilindrul coboară cu $\Delta h = 10 \text{ cm}$. Aflați presiunea inițială a gazului, dacă presiunea atmosferică este $p_0 = 100 \text{ kPa}$.



Hidrodinamica

1.8.34. Dintr-o ecluză se pompează apă la același nivel printr-un furtun de secțiune $S = 10 \text{ cm}^2$. Motorul pompei are puterea $P = 0,50 \text{ kW}$ și randamentul pompei $\eta = 26 \%$. Cu ce viteză iese apa din furtun?

1.8.35. Dintr-un furtun de secțiune $S = 2,0 \text{ cm}^2$ iese apa cu debitul $Q = 1,00 \text{ L/s}$ și lovește orizontal, inelastic, un perete vertical. Ce forță se exercită asupra peretelui?

1.8.36. O pompă pompează apă cu debitul $Q = 1,0 \text{ kg/s}$ pînă la o înălțime $h = 5,0 \text{ m}$ printr-un furtun de diametru $D = 3,0 \text{ cm}$. Care trebuie să fie puterea pompei? Dar dacă nu folosim furtunul?

1.8.37. O pompă aruncă apa vertical pînă la înălțimea H . Se atacează la pompă o țevă verticală de înălțime h , de aceeași secțiune cu orificiul de ieșire al pompei. În ce raport trebuie schimbată puterea pompei pentru ca apa să atingă aceeași înălțime H ? Dar dacă nu schimbăm debitul pompei?

* **1.8.38.** Roata unei mori de rază $R = 1,00 \text{ m}$, cu palete radiale plane, este pusă în mișcare cu un jet de apă de viteză $v = 12,56 \text{ m/s}$, ca în figură. Pentru ce rotație a roții puterea dezvoltată de roată va fi maximă?

1.8.39. O șalupă cu motor hidroreactiv absoarbe și ejectează apa mării cu debitul $Q = 0,100 \text{ m}^3/\text{s}$. Viteza de ejectare față de șalupă $v = 10,0 \text{ m/s}$, iar masa șalupei $m = 1,00 \text{ t}$. Ce accelerație capătă șalupa? (Se neglijează forțele de rezistență).

1.8.40. O șalupă se mișcă rectiliniu uniform, fiind propulsată cu un motor hidroreactiv care absoarbe apa printr-un orificiu de intrare și o ejectează printr-un orificiu de ieșire. Aflați randamentul mecanic al motorului, știind că aria orificiului de ieșire este de n ori mai mică decît aria orificiului de intrare.

**** 1.8.41.** Un vas cubic este umplut complet cu un lichid a cărui greutate este G . Aflați forța de presiune exercitată de lichid asupra unui perete lateral al vasului. Unde se află punctul de aplicație al acestei forțe?

**** 1.8.42.** O bucată de gheață de formă prismatică de arie S și grosime H plutește pe apă. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a cufunda complet gheața în apă?

**** 1.8.43.** Un vas cilindric de rază R conține un lichid de densitate ρ și se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Aflați ecuația suprafeței libere a lichidului și presiunea în lichid.

**** 1.8.44.** Un vas prismatic de înălțime h și secțiune S este plin cu un lichid. Pe fundul vasului se află un mic orificiu de arie S . În cât timp se golește o fracțiune f din volumul vasului?

(*) 1.8.45. Pe o masă stă un vas umplut cu un lichid de densitate ρ până în înălțimea h . La ce înălțime trebuie practicat un mic orificiu de arie S la peretele lateral astfel încât „bătăia” jetului de lichid să fie maximă? Cât va fi forța reactivă asupra vasului în acest caz?

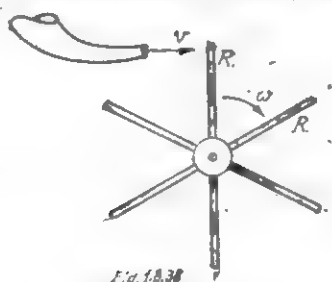


Fig. 1.8.38

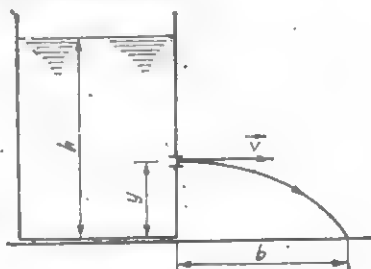


Fig. 1.8.45

**** 1.8.46.** Un vas cilindric este umplut pînă la înălțimea H cu un lichid de densitate ρ . De-a lungul unei generatoare se deschide la un moment dat o fantă îngustă de lățime b și înălțime de la h_1 la h_2 . Aflați forța reactivă asupra vasului.

**** 1.8.47.** Un tub subțire de secțiune S' și lungime l este rotit într-un plan orizontal cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ în jurul axei sale verticale trecînd prin capătul deschis. În tub se află o coloană de lichid de lungime h . La celălalt capăt închis există un mic orificiu de arie S . Calculați în cât timp se golește tubul de lichid.

**** 1.8.48.** O minge de rază R plutește pe apă astfel încît partea cufundată are înălțimea h . Calculați lucrul mecanic care trebuie efectuat pentru a cufunda mingea: a) pînă la mijloc, b) complet, c) pentru a scoate mingea din apă, d) lucrul mecanic net necesar de la atingerea apei pînă la cufundarea completă a mingii.

1.9. OSCILAȚII

— ȘI UNDE

— Oscilații mecanice

1.9.1. O particulă oscilează armonic cu perioada T , la $t = 0$ fiind în poziție de echilibru. În cât timp particula parcurge o fracțiune f (< 1) din amplitudine?

1.9.2. Un pendul simplu gravitațional de lungime $l = 1,00$ m este deviat cu un unghi $\alpha < 6^\circ$ apoi lăsat liber. După cât timp unghiul de deviație se reduce la jumătate?

1.9.3. Un corp alunecă fără frecări, o dată pe coarda AB ($\ll R$) și a doua oară pe arcu AB al sferei de rază R . Care este durata mișcării?



Fig. 1.9.3

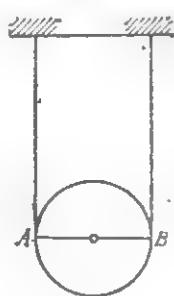


Fig. 1.9.6

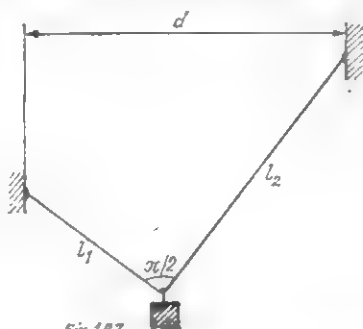


Fig. 1.9.7

1.9.4. Un ceasornic cu pendul merge exact când perioada sa este T_0 . Cu cât avansează (sau întârzie) el în $D = 24$ h dacă perioada devine T ? De exemplu T este cu $f = 0,01\%$ mai mare ca T_0 .

1.9.5. Care este amplitudinea unghiulară de oscilație a unui pendul simplu gravitațional, dacă viteza maximă $v = 2,1$ m/s? Perioada micilor oscilații ale aceluiași pendul este $T = 1,3$ s.

1.9.6. Un scripete este suspendat pe un fir ideal ca în figură. Aflați perioada micilor oscilații în planul figurii.

1.9.7. Un corp este suspendat de două fire ca în figură, unde $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 60$ cm și $d = 70$ cm. Aflați perioada micilor oscilații.

1.9.8. Căruciorul din figură merge jumătate din distanța $L = 20$ m uniform accelerat, apoi cealaltă jumătate uniform frinat, transportând un corp pe firul de lungime $l = 5,0$ m. Aflați accelerațiile posibile ale căruciorului pentru care corpul suspendat se va opri la sfârșitul drumului o dată cu căruciorul. Se consideră oscilații mici ale corpului suspendat

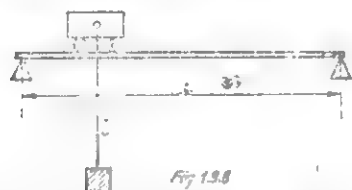


Fig. 1.9.8

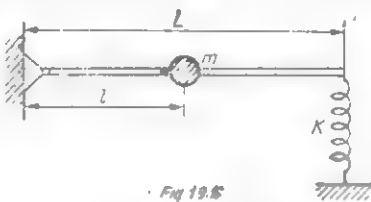


Fig. 1.9.9

1.9.9. Un jgheab semicilindric de lungime $l = 10,0$ m și rază $R = 0,20$ m este înclinat sub unghiul $\alpha = 45^\circ$ față de orizontală. Din vârful jgheabului, dintr-un punct puțin deplasat față de generatoarea inferioară a jgheabului, i se dă drumul unui mic corp să lunece fără frecări. De câte ori va intersecta corpul generatoarea inferioară a jgheabului?

1.9.10. Aflați variația relativă a perioadei de oscilație a unui pendul simplu gravitațional aflat deasupra unui zăcămint de forma unei sfere de rază $r = 1,00$ km, de densitate $\rho = n\rho_0$, $n = 3,0$, ρ_0 — densitatea medie a Pământului, cu centrul la adâncimea $h = 1,20$ km. Raza Pământului $R = 6400$ km.

1.9.11. Două bile mici identice sînt suspendate de fire paralele egale, astfel încît bilele se ating. Bila din stînga este deviată spre stînga cu un

unghi mic ($< 6^\circ$), iar bila din dreapta este deviată spre dreapta cu un unghi de două ori mai mic, și apoi lăsate liber simultan. După un timp $\tau = 0,30$ s bilele se ciocnesc perfect elastic. După cit timp de la ciocnire bila din dreapta va devia cu un unghi egal cu cel inițial?

1.9.12. O bilă suspendată de un resort vertical se află în echilibru, alungind resortul cu $\Delta l = 4,0$ cm. Aflați perioada oscilațiilor verticale ale acestei bile pe resort.

1.9.13. O bilă suspendată de un resort oscilează cu frecvența $\nu = 2,0$ Hz. Aflați alungirea statică a resortului (la echilibru).

1.9.14. Un resort de constantă elastică $k = 49$ N/m și lungime nedeformată $l = 0,40$ m este așezat vertical pe o masă. De la înălțimea $h = 2,80$ m deasupra mesei cade liber o bilă de masă $m = 1,00$ kg peste resort. Aflați viteza maximă a bilei.

1.9.15. Un corp este suspendat de un fir elastic. Dacă tragem de corp vertical în jos cu o forță care crește lent, atunci la valoarea $F_1 = 200$ N firul se rupe. Ce forță constantă minimă F_2 trebuie aplicată brusc pentru ca firul să se rupă?

1.9.16. O tijă de masă neglijabilă și de lungime $l = 1,00$ m este fixată cu un capăt într-o articulație ideală, iar celălalt capăt se sprijină pe un resort de constantă $k = 100$ N/m, ca în figură. Aflați perioada micilor oscilații ale corpului punctiform $m = 1,00$ kg de pe tijă, aflat la distanța $l = 0,50$ m de articulație.

1.9.17. Un corp de masă $m = 50$ g este suspendat de un resort ideal vertical nedeformat și lăsat liber fără viteză inițială. În ce raport se schimbă perioada și amplitudinea oscilațiilor, dacă în una din pozițiile extreme (superior, inferior) de corp se lipește un corp de masă $m' = 100$ g aflat inițial în repaus?

1.9.18. Talerul de masă $m_1 = 0,100$ kg atârnat de un resort oscilează vertical cu amplitudinea $A = 9,8$ cm. Când talerul se găsea în poziția extremă inferioară pe el se pune fără șoc un corp de masă $m_2 = 0,400$ kg, astfel încât oscilațiile dispar. Aflați perioada oscilațiilor inițiale.

1.9.19. Un resort de constantă elastică k are capătul superior fixat iar la capătul inferior prinsă o bilă de masă m . Ținem inițial resortul deformat cu x_0 (alungit $x_0 > 0$ sau comprimat $x_0 < 0$), apoi îi dăm drumul să oscileze. Aflați: amplitudinea oscilațiilor, deformațiile extreme în timpul oscilațiilor și căldura degajată după stingerea oscilațiilor.

1.9.20. Un corp de masă $M = 1,00$ kg este în echilibru, fiind atârnat de un resort. Se așează ușor peste acest corp un alt corp de masă $m = 0,50$ kg. Aflați forța de apăsare maximă și cea minimă dintre corpuri în timpul oscilațiilor sistemului. Aflați de asemenea aceste apăsări în cazul când corpul M este în echilibru fiind așezat peste resortul vertical.

1.9.21. De un resort vertical a fost suspendat un corp de masă $m_1 = 100$ g și lăsat liber. După amortizarea oscilațiilor s-a măsurat căldura degajată $Q_1 = 50$ mJ. Ce căldură se va degaja dacă înlocuim corpul cu unul de masă $m_2 = 200$ g?

1.9.22. În sistemul din figură, aflat în echilibru cu $m_2 = 100$ g, $k = 10$ N/m, la un moment dat se taie firul dintre corpurile m_1 și m_2 . Care va fi amplitudinea oscilațiilor? Câtă căldură se degajă după stingerea completă a oscilațiilor?

1.9.23. În sistemul din figură corpul $m_2 = 1,00 \text{ kg}$ se așează ușor peste talerul de masă m_1 suspendat de un resort cu $k = 100 \text{ N/m}$. Care va fi amplitudinea oscilațiilor? Câtă căldură se degajă după stingerea completă a oscilațiilor?



Fig. 19.22

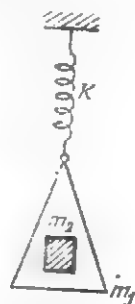


Fig. 19.23

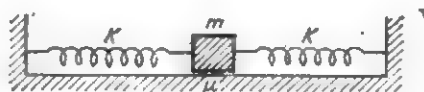


Fig. 19.27

1.9.24. Un resort de constantă elastică $k = 10 \text{ N/m}$ are capătul superior fixat, iar la capătul inferior prins un corp de masă $m = 50 \text{ g}$. Ținem inițial resortul vertical deformat cu $y_0 = \pm 10 \text{ cm}$ (alungit, respectiv comprimat), apoi îi dăm drumul să oscileze pe verticală ($g = 10 \text{ m/s}^2$). a) Aflați amplitudinea oscilațiilor. b) La un moment dat când corpul trece printr-una din pozițiile extreme, inferioară respectiv superioară, de corp se lipește un alt corp de masă $m' = 50 \text{ g}$ având inițial o viteză verticală $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$. Aflați noua amplitudine a oscilațiilor. c) Calculați căldura disipată prin stingerea oscilațiilor în cazul b).

1.9.25. Peste un resort vertical de constantă elastică $k = 10,0 \text{ N/m}$ este fixat un taler de masă $M = 100 \text{ g}$ peste care se așează o bilă de masă $m = 50 \text{ g}$. Din poziția de echilibru împingem talerul cu bila în jos cu $y_0 = 20 \text{ cm}$ și îi dăm drumul. Aflați înălțimea la care urcă bila față de poziția inițială de echilibru și amplitudinea oscilațiilor platanului după desprinderea bilei.

1.9.26. De tavan este suspendat printr-un resort de constantă $k = 100 \text{ N/m}$ un corp de masă $m = 0,50 \text{ kg}$ așezat pe un suport. Inițial resortul nu este deformat, după care suportul începe să coboare cu accelerația $a = 4,9 \text{ m/s}^2$. Aflați timpul după care corpul se desprinde de suport, alungirea maximă a resortului și amplitudinea oscilațiilor.

1.9.27. Un corp cu masa $m = 0,50 \text{ kg}$, fixat de două resorturi identice, fiecare de constantă elastică $k = 15 \text{ N/m}$, ca în figură, efectuează oscilații pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare μ . Știind două deviații consecutive de la poziția de echilibru, de o parte și de alta, $s_1 = 10,0 \text{ cm}$, $s_2 = 7,0 \text{ cm}$, aflați coeficientul μ .

1.9.28. Inițial sistemul din figură are resorturile nedeformate, $k_1 = 150 \text{ N/m}$, $k_2 = 250 \text{ N/m}$, apoi brusc întindem resortul 2 cu o distanță $d = 40 \text{ mm}$. Aflați amplitudinea oscilațiilor și viteza maximă a corpului $m = 250 \text{ g}$.

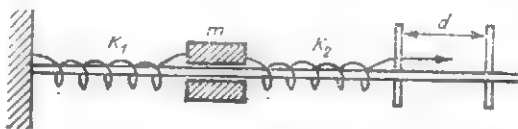


Fig. 19.28

1.9.29. Două sisteme identice se mișcă ca în figură pe un plan orizontal fără frecare și se ciocnesc perfect elastic, $m = 2,00 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $v_0 = 1,00 \text{ m/s}$, $L = 2,00 \text{ m}$. După cât timp revin în poziția inițială?

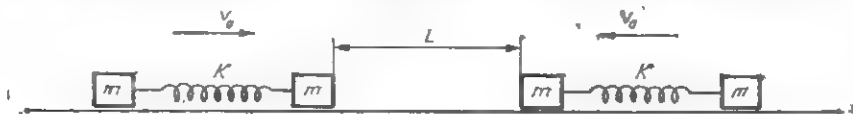


Fig. 1.9.29

1.9.30. În sistemul din figură barele de lungime $l = 0,15 \text{ m}$ au masă neglijabilă, articulațiile sînt ideale, iar resortul ideal este inițial nedeformat și unghiul $\alpha = 60^\circ$. Legăm de punctul inferior un corp și îl lăsăm liber să oscileze. Știind că după stingerea oscilațiilor unghiul $\beta = 120^\circ$, aflați care a fost amplitudinea oscilațiilor și perioada lor.

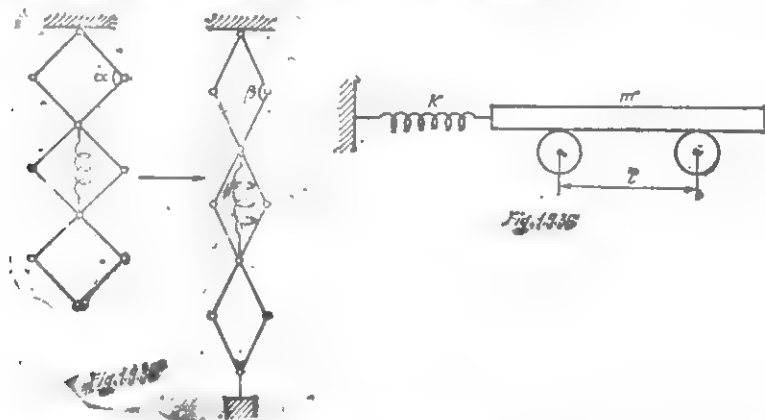


Fig. 1.9.30

1.9.31. Pe o masă orizontală este legată de un resort orizontal de constantă $k = 98 \text{ N/m}$ (avînd celălalt capăt fix) o bilă de masă $m = 0,200 \text{ kg}$, avînd coeficientul de frecare cu masa $\mu = 0,10$. Resortul cu bila este întins cu o distanță $A = 8,9 \text{ cm}$ ($<$ lungimea resortului nedeformat) și lăsat liber. Aflați lungimea totală parcursă de bilă pînă la oprire și timpul total respectiv.

1.9.32. O sanie de lungime $l = 2,00 \text{ m}$, lunecînd cu viteza $|\vec{v}_0| = 1,00 \text{ m/s}$ pe gheață netedă fără frecare, intră pe asfalt unde coeficientul de frecare este $\mu = 0,20$ și se oprește parcurgînd nu mai mult de jumătate din lungimea sa. a) Aflați distanța parcursă s_1 și timpul t_1 pînă la oprire. b) Se imprimă acum sației aceeași viteză \vec{v}_0 . Aflați distanța parcursă s_2 și timpul t_2 pînă la oprire ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

1.9.33. Un paralelipiped de lungime $l = 49 \text{ cm}$ lunecă cu viteza v_0 pe porțiunea netedă (fără frecări) a unui plan orizontal după care intră pe o porțiune rugoasă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,20$ și se oprește intrînd doar o fracțiune $f = 0,50$ din lungimea sa în această porțiune. Aflați timpul de frînare și viteza inițială.

1.9.34. Un paralelipiped de lungime $l = 49 \text{ cm}$ lunecă cu viteza $v_0 = 1,96 \text{ m/s}$ pe porțiunea netedă (fără frecări) a unui plan orizontal după care intră pe o porțiune rugoasă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,20$. Aflați timpul pînă la oprire.

1.9.35. Un corp pornește fără viteză inițială din virful unui plan înclinat de unghi $\alpha = 10^\circ$, coeficientul de frecare crescînd după legea $\mu =$

b_x , unde $b = 0,30 \text{ m}^{-1}$. Corpul se oprește înainte de a ajunge la baza planului. Aflați timpul de mișcare și distanța parcursă.

1.9.36. O scindură omogenă și uniformă de masă $m = 10,0 \text{ kg}$ este așezată simetric pe două tambururi, distanța dintre axele acestora fiind $l = 0,98 \text{ m}$. Unul din tambururi este neted fără frecări, iar celălalt este rugos cu coeficientul de frecare $\mu = 0,15$. Scindura este legată printr-un resort orizontal nedeformat de constantă $k = 205 \text{ N/m}$ de un perete. Se pune în rotație rapidă tamburul rugos. Aflați frecvența unghiulară a micilor oscilații orizontale ale scindurii.

1.9.37. O bilă suspendată de un resort execută oscilații verticale cu perioada $T = 0,90 \text{ s}$. Cât devine perioada dacă dedesubt se așează la distanța $x_0 = A/2$ de poziția de echilibru un perete orizontal de care se va ciocni periodic perfect elastic bila?

1.9.38. O bilă perfect elastică, suspendată de un resort, efectuează oscilații armonice de amplitudine A . La ce distanță de poziția de echilibru trebuie pus un perete perfect elastic pentru ca perioada oscilațiilor să se reducă cu o fracțiune f ? Aplicație $f = 1/3$.

1.9.39. Asupra corpului de masă $m = 10,0 \text{ kg}$ din figură, aflat inițial în echilibru, acționează la un moment dat o forță constantă F . Constanta elastică a resortului $k = 4,0 \text{ kN/m}$. Cât timp τ trebuie să acționeze această forță pentru ca după încetarea ei corpul să rămână din nou în repaus? Frecările sunt neglijabile.



Fig. 1.9.39

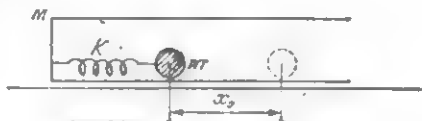


Fig. 1.9.40

1.9.40. Într-o țevă de masă $M = 200 \text{ g}$ așezată pe un plan orizontal fără frecări se află un resort de constantă $k = 220 \text{ N/m}$ fixat cu un capăt de țevă, iar cu celălalt sprijinit de o bilă de masă $m = 20 \text{ g}$. Comprimăm resortul cu bila cu $x_0 = 5,0 \text{ cm}$ și îi dăm drumul. Aflați viteza relativă a bilei față de țevă și timpul în care se produce accelerarea bilei.

1.9.41. Pe talerul de masă neglijabilă, atârnat de un resort de constantă elastică $k = 78,4 \text{ N/m}$, cade de la înălțimea $h = 0,50 \text{ m}$ un corp de masă $m = 1,00 \text{ kg}$ și rămâne pe taler (ciocnire plastică). Aflați amplitudinea oscilațiilor.

1.9.42. Căruciorul din figură, de masă $M = 640 \text{ g}$, efectuează oscilații. În momentul când trece prin poziția de echilibru în el cade un corp de masă $m = 360 \text{ g}$ (ciocnire plastică). Aflați în ce raport se schimbă amplitudinea oscilațiilor.

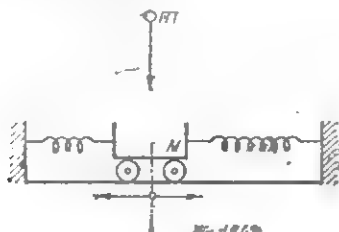


Fig. 1.9.42

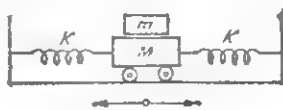


Fig. 1.9.43

1.9.43. Pe o masă orizontală netedă, fără frecări, este așezat un corp de masă $M = 1,00 \text{ kg}$ legat prin două resorturi identice de constantă elastică $k = 30 \text{ N/m}$ fiecare. Deasupra corpului M se așează un alt corp de masă $m = 0,50 \text{ kg}$ cu coeficientul de frecare $\mu = 0,40$ față de primul. Aflați amplitudinea oscilațiilor pentru care corpul m începe să lunece peste corpul M .

1.9.44. Un corp de masă $m = 1,00 \text{ kg}$ este așezat pe talerul de masă $M = 0,50 \text{ kg}$ al unui resort ca în figură. Cu ce forță trebuie apăsât corpul m pentru ca după încetarea apăsării el să se desprindă de taler?



Fig. 1.9.44

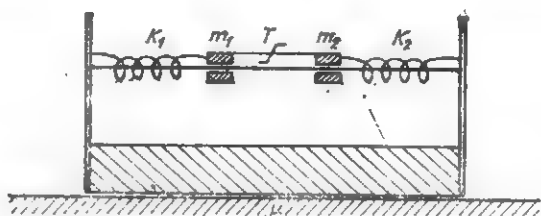


Fig. 1.9.45

1.9.45. Două bile de mase $m_1 = 200 \text{ g}$, $m_2 = 300 \text{ g}$ pot oscila fără frecare pe o tijă orizontală sub acțiunea resorturilor din figură. Tija este fixată pe un suport de masă $M = 1,00 \text{ kg}$. Inițial bilele sînt legate între ele printr-un fir în care tensiunea $T = 3,0 \text{ N}$. Ce coeficient de frecare minim este necesar între suport și planul orizontal pentru ca suportul să nu lunece în timpul oscilațiilor, după ce se arde firul de legătură?

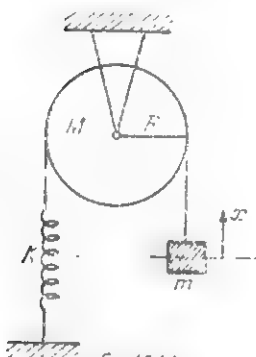


Fig. 1.9.46



1.9.46. În sistemul din figură scripetele este un disc omogen de masă $M = 0,40 \text{ kg}$. Se cunosc de asemenea $k = 100 \text{ N/m}$ și $m = 0,80 \text{ kg}$. Aflați perioada micilor oscilații ale sistemului.

1.9.47. În sistemul din figură scripetele are masa $m = 400 \text{ g}$, dar dimensiuni neglijabile și frecări în lagăr neglijabile, $M = 900 \text{ g}$, $k = 100 \text{ N/m}$. Aflați perioada oscilațiilor.

1.9.48. Pe o platformă orizontală care vibrează oblic sub unghiul $\alpha = 45^\circ$ față de verticală, cu frecvența $\nu = 10 \text{ Hz}$, este așezat un corp paralelipedic cu coeficientul de frecare cu platforma $\mu = 0,50$. Pentru ce valoare a amplitudinii oscilațiilor corpul începe să lunece respectiv să salte pe platformă?

**** 1.9.49.** O bilă de masă m este suspendată de un resort (ideal) de lungime nedeformată l_0 și constantă k . Capătul superior al resortului execută oscilații verticale de amplitudine A și frecvență unghiulară Ω . Deduceți ecuația oscilațiilor bilei în regim permanent.

* 1.9.50. O halteră de lungime $l = 1,05$ m este așezată transversal pe un semicilindru orizontal fix de rază $R = 0,45$ m. Aflați perioada micilor oscilații ale halterei, considerind că haltera nu alunecă.

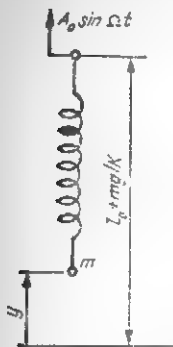
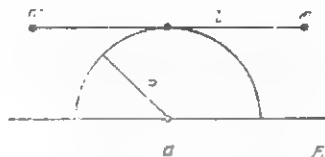
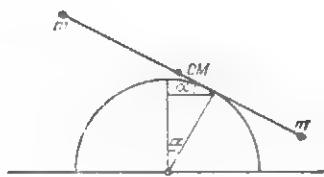


Fig. 1.9.49



a

Fig. 1.9.50



b

* 1.9.51. Un cerc de butoi de rază $r = 50$ cm oscilează (fără lunecare) în plan vertical pe suprafața interioară a unui cilindru orizontal de rază $R = 94,1$ cm. Aflați perioada micilor oscilații.

* 1.9.52. Un cerc de butoi de rază $R = 94,1$ cm este așezat transversal pe un cilindru orizontal de rază $r = 50$ cm. Aflați perioada micilor oscilații ale cercului în planul său vertical, considerind frecarea suficient de mare ca cercul să nu lunece.

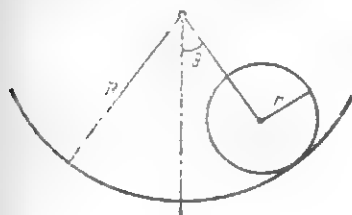
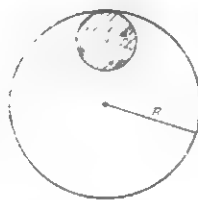
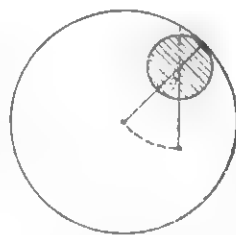


Fig. 1.9.51



a

Fig. 1.9.52



b

* 1.9.53. Aflați perioada oscilațiilor unui lichid de densitate $\rho = 800$ kg/m³ și masă $m = 0,800$ kg aflat într-un tub vertical de forma literei U cu secțiunile ramurilor $S_1 = 4,0$ cm², $S_2 = 6,0$ cm².

1.9.54. Evaluați dimensiunile neuniformităților de-a lungul unui șanț de înregistrare a sunetului pe un disc microsion ($n = 33$ rot/min).

1.9.55. O bară omogenă și uniformă, plutește cufundată vertical, aproape complet, într-un lichid. Cufundând-o foarte puțin și lăsând-o liberă, bara oscilează vertical cu perioada $T = 2,0$ s. Aflați lungimea barei.

— Unde elastice

1.9.56. Distanța dintre „dealurile” valurilor pe apă este $\lambda = 5,0$ m. O barcă înaintind spre valuri este izbită de valuri cu frecvența $\nu_1 = 4,0$ s⁻¹, iar fugind din fața valurilor — cu frecvența $\nu_2 = 2,0$ s⁻¹. Aflați viteza valurilor și a b arcii.

1.9.57. Cum variază faza mișcării oscilatorii armonice a particulelor mediului de-a lungul unei unde staționare?

1.9.58. Un avion cu reacție zboară cu viteza constantă $v = 500$ m/s la altitudinea $h = 6,8$ km. Care este forma frontului unde de șoc produsă de avion? La ce distanță de o casă se află avionul în momentul când geamurile casei încep să vibreze? Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

1.9.59. Calculați indicele de refracție a sunetului la suprafața de separație aer-sticlă, cunoscând densitatea sticlei $\rho = 2600$ kg/m³, modulul de elasticitate $E = 7,0 \cdot 10^{10}$ N/m² și viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

**** 1.9.60.** Calculați densitatea medie (în timp) de energie cinetică, potențială și totală într-o undă staționară longitudinală a cărei ecuație este $u(x,t) = A \cos(kx + \beta) \cos(\omega t + \alpha)$, unde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, ρ — densitatea materialului.

1.9.61. Frecvența sunetului emis de o coardă întinsă cu forța $F_1 = 160$ N diferă de frecvența unui diapazon cu $\Delta\nu = 20$ Hz. Întinsă fiind cu forța $F_2 = 250$ N, coarda vibrează la unison (în rezonanță) cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

1.9.62. Frecvența emisă de o coardă diferă de frecvența unui diapazon cu $\Delta\nu = 10$ Hz. Dacă se scurtează coarda cu o fracțiune $f = 0,010$ din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

1.9.63. Un tub sonor închis emite tonul fundamental de frecvență $\nu = 250$ Hz. Cunoscând viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s, aflați lungimea tubului și frecvența tonului fundamental emis de același tub dacă îl deschidem.

1.9.64. Două tuburi sonore, unul închis și altul deschis, au aceeași lungime. Tubul deschis are frecvența fundamentală $\nu = 440$ Hz. Calculați frecvența armonicii a 3-a a celor două tuburi.

1.9.65. Cite surse sonore identice trebuie reunite pentru ca nivelul sonor să crească cu $\Delta L = 20$ dB față de nivelul dat de o singură sursă?

**** 1.9.66.** O particulă oscilează sinusoidal: $x = A \cos(\omega t + \alpha)$. Fie $dP(x) = p(x)dx$ probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$. Calculați densitatea de probabilitate $p(x)$.

*** 1.9.67.** Ecuațiile mișcării unei particule sînt: $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$. Aflați ecuația traiectoriei și legea forței.

**** 1.9.68.** Un corp de masă m este suspendat în repaus de un resort de constantă elastică k în cabina unui lift. La un moment dat ($t = 0$) liftul pornește în sus cu accelerația $a = Bt$, $B = \text{const} > 0$. Aflați legea mișcării corpului față de lift.

**** 1.9.69.** Un corp de masă m este suspendat în repaus de un resort de constantă elastică k . La un moment dat ($t = 0$) începe să acționeze o forță constantă F care durează un timp τ . Aflați amplitudinea oscilațiilor după încetarea acțiunii forței.

**** 1.9.70.** Un corp de masă m , așezat pe o masă orizontală fără frecări, este legat printr-un resort de masă m' și constantă elastică k de un perete. Aflați frecvența oscilațiilor corpului (se consideră că toate punctele resortului oscilează în fază) (model de resort real).

**** 1.9.71.** O particulă de masă m supusă la o forță de tip elastic $-kx$ (de exemplu, suspendată de un resort) oscilează liber într-un mediu fluid unde acționează o forță de frecare $-r\dot{x}$. Studiați mișcarea particulei.

**** 1.9.72.** O particulă oscilează sub acțiunea unei forțe de tip elastic $-kx$ într-un mediu viscos în care întîmpină o forță de frecare $-r\dot{x}$. Pentru a obține oscilații întreținute (neamortizate) se aplică particulei o forță sinusoidală $f = F_0 \cos \Omega t$. Studiați mișcarea rezultantă a particulei.

1.1.9. $a = g \sin^2(\alpha/2) = 4,9 \text{ m/s}^2$.

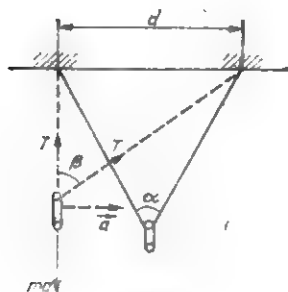


Fig. 1.1.9 R

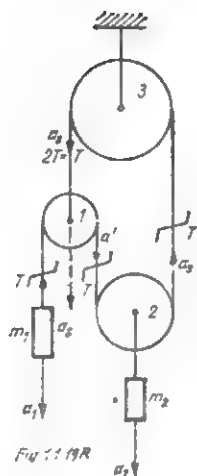


Fig. 1.1.10 R

1.1.10. $N = m(a + g) \cos \alpha = 2,0 \text{ N}$,

$T = m(a + g) \sin \alpha = 1,2 \text{ N}$.

1.1.11. $T = m_1 m_2 g \cos^2 \alpha : (m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) = 147 \text{ N}$,

1.1.12. $v = \frac{1}{2} F(1/m_1 + 1/m_2)t$.

1.1.13. $T_2 = mg \Delta m : (4m + \Delta m) = 3,6 \text{ N}$.

1.1.14. $m_2 = m_1 M : (M - 2m_1) = 125 \text{ g}$.

1.1.15. $a = g(2M - m)/m = 19,6 \text{ m/s}^2$.

1.1.16. $a_1 = 2g(2m_1 - m_2) : (4m_1 + m_2) = 2,45 \text{ m/s}^2$,

$T_1 = 3m_1 m_2 g : (4m_1 + m_2) = 11,0 \text{ N}$.

1.1.17. $3m_1 m_2 - 4m_2 m_3 - m_3 m_1 = 0$.

1.1.18. $a_1 = 2g(2m_1 + m_2) : (4m_1 + m_2) = 11,6 \text{ m/s}^2$.

1.1.19. a) $a_s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, b) $a_s = 3g$, $a' = 5g$, $T = 0$.

1.1.20. $T = 4m_1 m_2 m_3 g : [4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2)] = 9,8 \text{ N}$.

1.1.21. $a' = g \sin \frac{\alpha}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} = 2,2 \text{ m/s}^2$, unde $\sin \alpha = a(m_1 + m_2) : (m_2 g)$.

1.1.22. $v' = v_1 \tan \alpha : (1 - a_1/g) = 8,66 \text{ m/s}$.

1.2. Cinematica și dinamica punctului material

Mișcarea rectilinie uniformă

1.2.1. $v_0 = v/\sqrt{2} = 21 \text{ m/s}$.

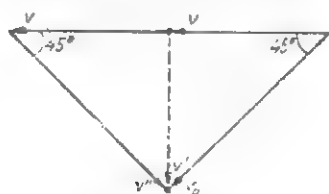


Fig. 1.2.1 R

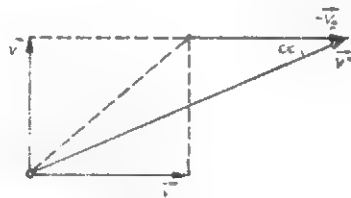


Fig. 1.2.2 R

1.2.2. $\operatorname{tg} \alpha = v' : (v_1 + v_2)$, $\alpha = 28^\circ 4'$.

1.2.3. $v_2 = v_1 \pm l_2/t_1 = 25$ m/s sau $5,0$ m/s, $t'_1 = l_2 : (v_1 + v_2) = 15$ s sau 30 s, $t'_2 = l_1 : (v_1 + v_2) = 22,5$ s sau 45 s.

(*) 1.2.4. Din asemănarea triunghiurilor avem

$$\frac{x}{AB} = \frac{v_a - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}, \quad (1)$$

de unde

$$x = AB \frac{v_a - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = f(\alpha). \quad (2)$$

Distanța x este funcție de unghiul α și are extreme acolo unde derivata sa se anulează:

$$\begin{aligned} x'(\alpha) = f'(\alpha) &= \frac{AB}{v_0} \left(\frac{v_a - v_0 \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)' = \\ &= \frac{AB - v_0 \cos \alpha \cos \alpha - (v_a - v_0 \sin \alpha)(-\sin \alpha)}{v_0 \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{AB - v_0 + v_a \sin \alpha}{v_0 \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (3)$$

care se anulează pentru

$$-v_0 + v_a \sin \alpha = 0, \quad \sin \alpha = v_0/v_a = 1/2, \quad \alpha = 30^\circ. \quad (4)$$

Problema se poate rezolva și elementar, fără derivate, dacă facem desenul ca în figura b și observăm că se obține x minim atunci când direcția vitezei rezultante $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_a$ este tangentă la semicercul din figură care este loc geometric al virfurilor vitezei rezultante.

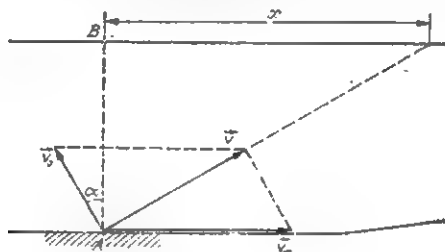


Fig 124.9

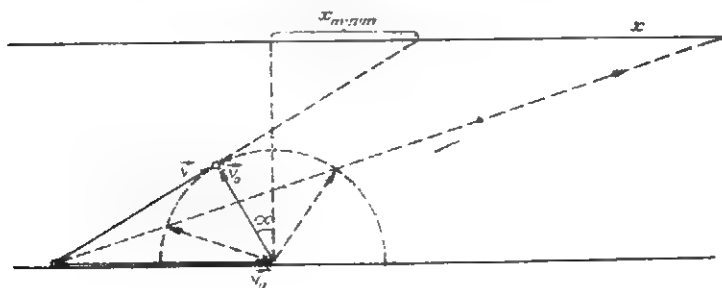


Fig 124.10

1.2.5. Vd. fig.

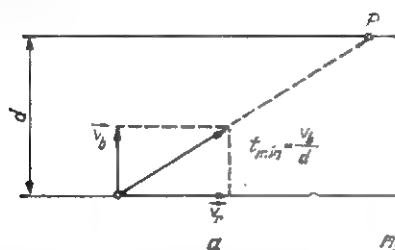
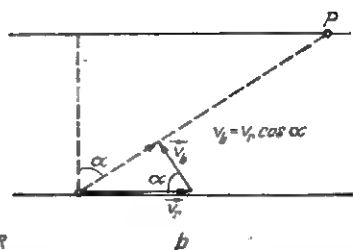


Fig. 1.2.5R



1.2.6. $u_x = v \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - n \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} = 10 \text{ km/h}$, $u_y = r(n-1) \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} = 17,3 \text{ km/h}$, $v' = u_x = 10 \text{ km/h}$.

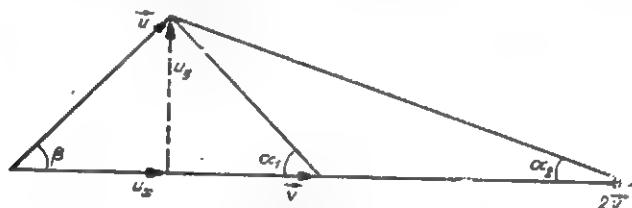


Fig. 1.2.6R

1.2.7. $t = (v_2 t_0 - s_0) : (v_2 - v_1) = 3,0 \text{ h}$, $d = v_1 t = 150 \text{ km}$ și $t^* = s_0 / v_1 = 1,2 \text{ h}$, $s^* = s_0 = 60 \text{ km}$.

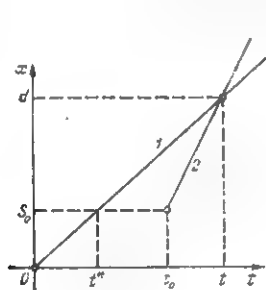


Fig. 1.2.7R

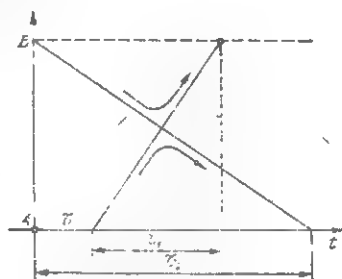


Fig. 1.2.8R

1.2.8. $\tau = \frac{1}{2} (\tau_2 - \tau_1) = 45 \text{ min}$.

1.2.9. $t_0 = \sqrt{t_1 t_2}$, $v_1 = s : t_0 = 5,0 \text{ m/s}$.

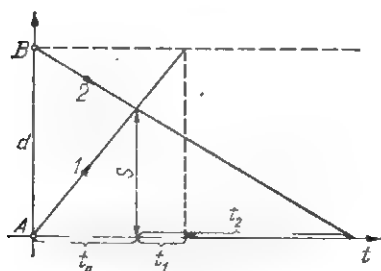


Fig. 1.2.9R

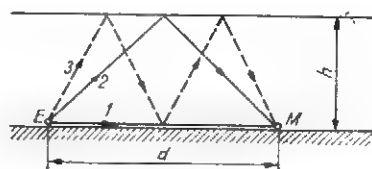


Fig. 1.2.10R

$$1.2.10. d = \frac{c}{2} (T_2^2 - 4T_1^2) : (4T_1 - T_2) = 3,75 \text{ km},$$

$$h = \frac{c}{2} \sqrt{T_1 T_2 (T_2 - T_1) : (4T_1 - T_2)} = 1,84 \text{ km}.$$

$$1.2.11. \sin(\alpha - \beta) \geq \frac{r_0}{r} \cos \alpha = 0,86, \beta \in (-45^\circ, 15^\circ), v_{\min} = v_0 \cos \alpha = 2,6 \text{ m/s}$$

cind $\beta = \alpha - 90^\circ = -15^\circ$.

$$1.2.12. d_3 = (d_1 + d_2) (r_1 + r_3) : (r_1 - r_2) = 400 \text{ m}.$$

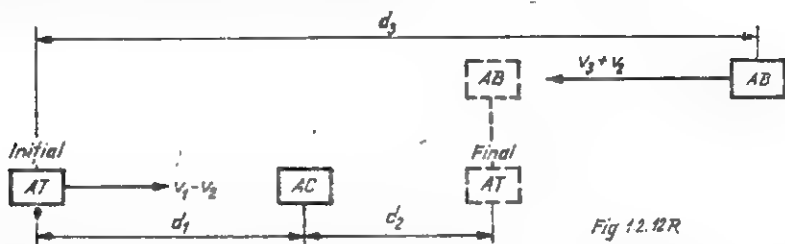


Fig. 12.12R

1.2.13. $v' = \frac{1}{2} l (v - u) : (v + u)$ dacă $u < v$ (ordinea se păstrează) resp. dacă $u > v$ (ordinea se inversează).

$$1.2.14. d' = [d(v' + u) - l(v - v')]:$$

$$(v + u) = 13,1 \text{ m}, d_{\min} = l(v - v'):$$

$$(v' + u) = 1,14 \text{ m}, v'_{\min} = l(v - du):$$

$$(d + l) < 0, \text{ deci } v'_{\min} = 0, L' = [L(v' +$$

$$+ u) + l(r - r')]: (r + u) = 330 \text{ m}.$$

$$1.2.15. d = T(c - v)^2 : (2c) = 4,0 \text{ km}.$$

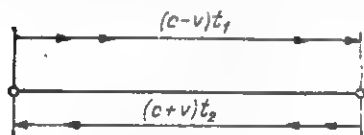


Fig. 12.15R

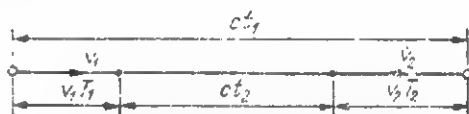


Fig. 12.15R

$$1.2.16. T_2 = T_1(c \mp r_1) : (c \pm r_2) = 0,88 \text{ s} \text{ resp. } 1,14 \text{ s}.$$

$$1.2.17. \tau \leq \frac{1}{c} \sqrt{r^2 + 4l_1 l_2} - \frac{r}{c} = 0,28 \text{ s}.$$

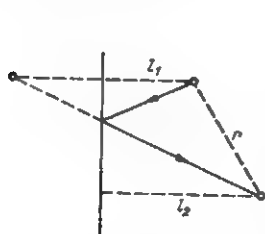


Fig. 12.17R

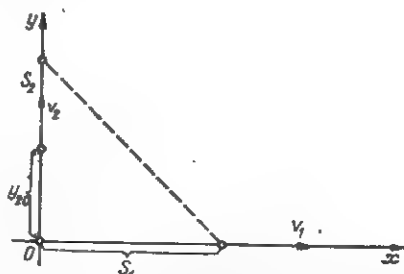


Fig. 12.18R

(*) 1.2.18. Alegem momentul inițial $t = 0$ cind primul camion trecea prin intersecție $y_0 = 0$, atunci celălalt camion era la distanța y_{20} . La momentul t distanța dintre camioane devine:

$$d^2 = (r_1 t)^2 + (y_{20} + v_2 t)^2 = f(t). \quad (1)$$

Condiția de extrem este anularea derivatei :

$$f'(t) = 0 \text{ sau } 2v_1^2 t + 2(y_{20} + v_2 t)v_2 = 0, \quad (2)$$

de unde
$$t = (-y_{20}v_2) : (v_1^2 + v_2^2). \quad (3)$$

Natura extremului se obține din semnul derivatei a doua :

$$f''(t) = 2v_1^2 + 2v_2^2 > 0, \quad (4)$$

deci avem un *minim*.

Rezultatul (3) se poate obține și fără derivate. În adevăr,

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 + 2y_{20}v_2 t + y_{20}^2, \quad (1)$$

această funcție pătratică se reprezintă printr-o parabolă care are un *minim* ($a = v_1^2 + v_2^2 > 0$) pentru

$$t = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{2y_{20}v_2}{2(v_1^2 + v_2^2)}. \quad (3)$$

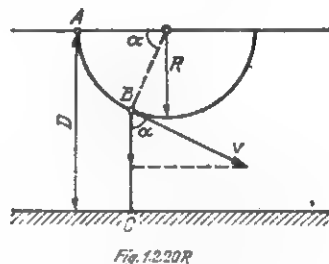
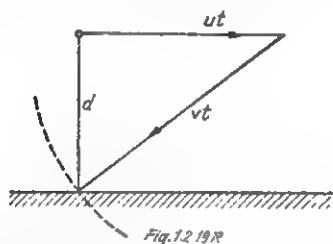
Pentru acest moment :

$$s_1 = v_1 t = (-y_{20}v_1v_2) : (v_1^2 + v_2^2), \quad (5)$$

de unde
$$y_{20} = -s_1(v_1^2 + v_2^2) : (v_1v_2) \text{ și } t = s_1 : v_1 \quad (6)$$

și deci
$$s_2 = y_{20} + v_2 t = -s_1 v_1 / v_2 = -6,0 \text{ km.} \quad (7)$$

1.2.19. $t = d : \sqrt{v^2 - u^2} = 11,5 \text{ s.}$



1.2.20. $t = \alpha R / v + (D - R \sin \alpha) : u = 272,3 \text{ s, unde } \cos \alpha = u / v,$
 $\alpha = 75,5^\circ = 1,318 \text{ rad.}$

Mișcarea rectilinie uniform variată

1.2.21. Vd. fig.

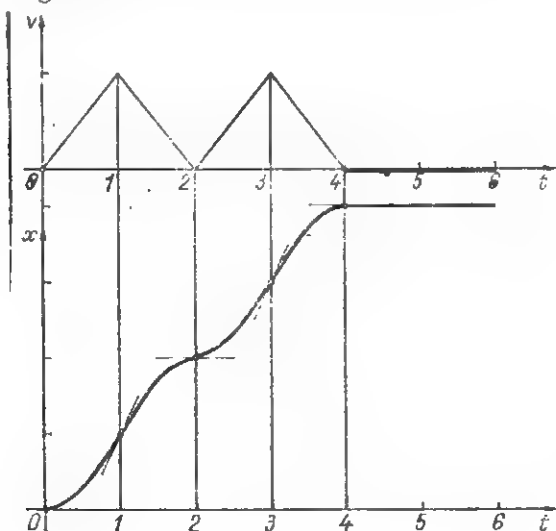


fig. 1.2.21R

1.2.22. Vd. fig.

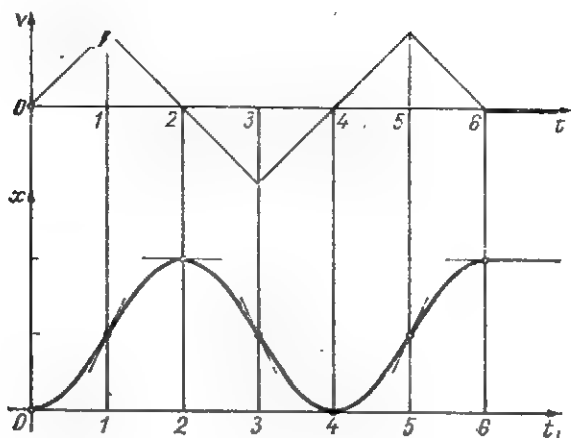


Fig.1.2.22R

1.2.23. Vd. fig. $t_3 = \frac{1}{2} t_2^2 : (t_2 - t_1)$.

(*) 1.2.24. a) Pentru $t < T$:

$$x_1 = v_{01}t - \frac{1}{2} (v_{01}/T)t^2, \quad x_2 = \frac{1}{2} (v_{02}/T)t^2. \quad (1)$$

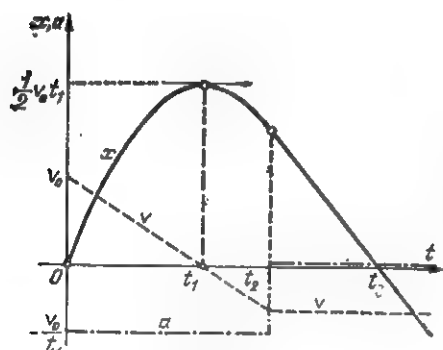
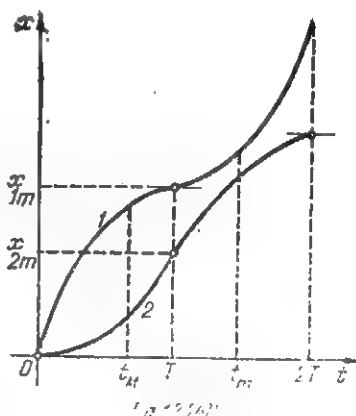


Fig.1.2.23R



Condiția de extrem pentru

$$s = x_1 - x_2 = f(t) \quad (2)$$

este anularea derivatei:

$$f'(t) = v_{01} - (v_{01}/T)t - (v_{02}/T)t = 0, \text{ de unde } t_M = T v_{01} : (v_{01} + v_{02}) \quad (3)$$

și

$$(x_1 - x_2)_{\max} = \frac{1}{2} T v_{01}^2 : (v_{01} + v_{02}). \quad (4)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$f''(t) = -v_{01}/T - v_{02}/T < 0, \quad (5)$$

deci avem un *maxim*.

Rezultatul (3) se obține și fără derivate, observând că funcția (2) este pătratică și se reprezintă, deci printr-o parabolă, care are un *maxim*

$$\left(a = -\frac{1}{2} v_{01}/T - \frac{1}{2} v_{02}/T < 0 \right) \text{ pentru}$$

$$t = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{v_{01}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} v_{01}/T - \frac{1}{2} v_{02}/T \right)}.$$

$$b) \quad x_{1m} = \frac{1}{2} v_{01} T, \quad x_{2m} = \frac{1}{2} v_{02} T < x_{1m}. \quad (6)$$

Pentru $t > T$:

$$x_1 = x_{1m} + \frac{1}{2} (v_{01}/T)(t - T)^2, \quad (7)$$

$$x_2 = x_{2m} + v_{02}(t - T) - \frac{1}{2} (v_{02}/T)(t - T)^2.$$

Condiția de extrem pentru

$$s = x_1 - x_2 = s(t) \quad (8)$$

este anularea derivatei:

$$s'(t) = (v_{01}/T)(t - T) - v_{02} + (v_{02}/T)(t - T) = 0, \quad (9)$$

de unde

$$t_m = T + v_{02} T : (v_{01} + v_{02}) \quad (10)$$

și

$$(x_1 - x_2)_{\min} = \frac{1}{2} T(v_{01}^2 - 2v_{02}^2) : (v_{01} + v_{02}). \quad (11)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$s''(t) = v_{01}/T + v_{02}/T > 0, \quad (12)$$

deci avem un *minim*.

Rezultatul (10) se poate obține și fără derivate, observând că $s(t)$ (8) este o funcție pătratică și se reprezintă printr-o parabolă care are un *minim* $\left(a = \frac{1}{2} v_{01}/T + \frac{1}{2} v_{02}/T > 0 \right)$ pentru

$$t = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{-v_{01} - v_{02} - v_{02}}{2 \left(\frac{1}{2} v_{01}/T + \frac{1}{2} v_{02}/T \right)} = \frac{v_{01} + 2v_{02}}{v_{01} + v_{02}} T. \quad (10)$$

Dacă $v_1 < 2 v_{02}$ mobilele se vor încrucișa ($s = 0$) și deci $(x_1 - x_2)_{\min} = 0$.

$$1.2.25. \quad v' = v/\sqrt{2} = 10 \text{ m/s.}$$

$$1.2.26. \quad T = t(2 + \sqrt{2}) = 6,8 \text{ s.}$$

$$1.2.27. \quad s_{1/2} = \frac{3}{4} s_m = 300 \text{ m.}$$

$$1.2.28. \quad t_{1/2} = t_m(1 - 1/\sqrt{2}) = 41 \text{ m.}$$

$$1.2.29. \quad \langle v \rangle = v/2 = 5,0 \text{ m/s.}$$

$$1.2.30. \quad \langle v_2 \rangle : \langle v_1 \rangle = 1 + \sqrt{2}.$$

$$1.2.31. \quad v_0 = 2\sqrt{sd : (t_2^2 - t_1^2)} = 15 \text{ m/s.}$$

$$1.2.32. \quad a_1 = 2s : (tt_1) = 0,10 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.33. \quad a_{1,2} = \pm 2(d_1 + d_2)^2 : (T^2 d_{1,2}) = 0,033 \text{ m/s}^2 \text{ resp. } -0,050 \text{ m/s}^2.$$

1.2.34. $d = x(v_0^2 + v'^2) : (v_0^2 - v'^2) = 26,0 \text{ m}$, $\langle v \rangle = (v_0 + v') : 2 = 2,25 \text{ m/s}$, $\langle |v| \rangle = d/t' = 6,5 \text{ m/s}$.

1.2.35. $v't = v_0(t - \tau) + \frac{1}{2} a(t - \tau)^2$ de unde $t_1 = 12 \text{ s}$ pentru prima intalnire, $t_2 = v_0^2 : (-2av') = 33 \text{ s}$ pentru a doua intalnire.

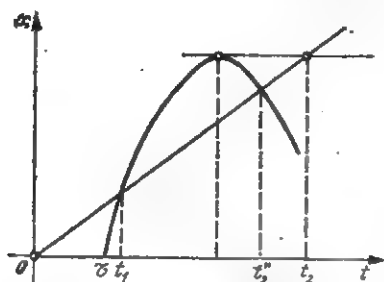


Fig. 1.2.35R

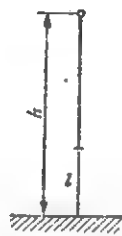


Fig. 1.2.47R

(*) 1.2.36. Timpul total de mișcare: $t = l/v_0 + v_0/|a| = f(v_0)$ (1)
este funcție de v_0 . Condiția de extremum pentru t este anularea derivatei:

$$f'(v_0) = -l/v_0^2 + 1/|a| = 0 \quad (2)$$

de unde

$$v_0 = \sqrt{l|a|} = 20 \text{ m/s}. \quad (3)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$f''(v_0) = +2l/v_0^3 > 0, \quad (4)$$

deci avem un *minim*.

Problema se poate rezolva elementar fără derivate deoarece produsul celor doi termeni din expresia timpului t ste constant, suma lor este minimă cind ei sînt egali:

$$l/v_0 = v_0/|a| \text{ etc.} \quad (5)$$

1.2.37. a) $v_1 = 2l_1/t_1 = 8,0 \text{ m/s}$, b) $a_1 = 2l_1/t_1^2 = 0,80 \text{ m/s}^2$, $a_2 = -2l_2^2 : (l_2 t_1^2) = -1,6 \text{ m/s}^2$, c) $t = t_1(1 + l_2/l_1) = 15 \text{ s}$, d) $\langle |v| \rangle = l_1/t_1 = 4,0 \text{ m/s}$.

$$1.2.38. t = \frac{1}{2} (t_1 - t_2) + l(1/t_2 - 1/t_1) : (g \sin \alpha) = 0,55 \text{ s}.$$

$$1.2.39. m_2/m_1 = [g\tau^2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \alpha_1 + 2h] :$$

$$[g\tau^2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \alpha_2 - 2h] = 3,0.$$

$$1.2.40. v_0 = v' : (1 - \pi/4) = 40 \text{ m/s}.$$

$$1.2.41. s = dM : (M - m) = 3,3 \text{ km}.$$

$$1.2.42. a) s = d(2 - a_1/a_2) = 4,2 \text{ km}, \text{ b) } s = d(2M - m) : (M - m) = 4,2 \text{ km}.$$

$$1.2.43. a'_1 = -\frac{v_0}{t'} \left[1 + \frac{m}{M - m} \frac{1}{t + t'} \right] = -1,09 \text{ m/s}^2.$$

Mișcarea sub acțiunea greutateii

$$1.2.44. a) 5v_0^2 : (2g) = 12,5 \text{ m}, \text{ b) } 3v_0^2 : (2g) = 7,5 \text{ m}.$$

$$1.2.45. v' = at\sqrt{1 + g/a} = 42,4 \text{ m/s}.$$

$$1.2.46. h = [\sqrt{c^2 : (2g) + ct - c : (\sqrt{2g})}]^2 = 392 \text{ m}.$$

$$1.2.47. h = \frac{1}{2} g[l/(g\tau) + \tau/2]^2 = 30,6 \text{ m}.$$

$$1.2.48. f' = 1 - \sqrt{1-f} = 0,20 = 20\%.$$

$$1.2.49. h = \frac{1}{2} g t_1 t_2 = 9,8 \text{ m}.$$

$$1.2.50. s_i = (2i - 1)h : n^2 = 1, 3, 5, \dots, 19 \text{ m}.$$

$$1.2.51. \tau = -t + \sqrt{t^2 + 2l/g} = 1,0 \text{ s}.$$

$$1.2.52. h = (h' + d)^2 : (4d) = 225 \text{ m}.$$

$$1.2.53. H = h + v_0 \sqrt{2h/g} = 10,9 \text{ m}.$$

$$1.2.54. \tau = \frac{2}{g} v_0 \sqrt{1-f} = 2,4 \text{ m}.$$

$$1.2.55. v_0 = \frac{1}{2} g \tau (2\sqrt{2h/g} - \tau) : (\sqrt{2h/g} - \tau) = 14,7 \text{ m/s}.$$

$$1.2.56. 2v_{01}/g - 2v_{02}/g < \tau < 2v_{01}/g, 2,0 \text{ s} < \tau < 6,0 \text{ s}.$$

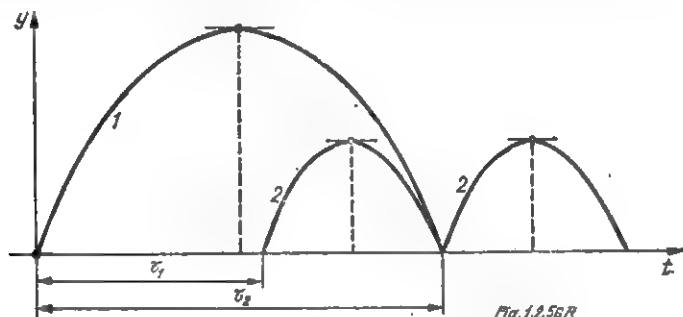


Fig. 1.2.56R

$$1.2.57. v_{01}t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2g} v_{02}^2, t = \tau + v_{02}/g, \text{ de unde } v_{02} = 6,95 \text{ m/s}.$$

$$1.2.58. t = \tau [n + \sqrt{n(n-1)}] = 9,0 \text{ s}.$$

(*) 1.2.59. Din condiția de întâlnire :

$$v_{01}t - \frac{1}{2} g t^2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2 \quad (1)$$

$$\text{rezultă : } t = (g\tau^2/2 + v_{02}\tau) : (g\tau - v_{01} + v_{02}) = f(\tau). \quad (2)$$

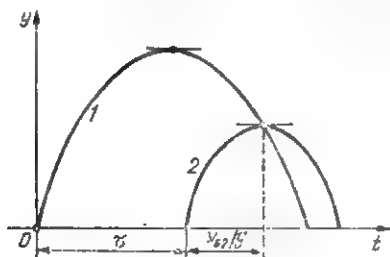


Fig. 1.2.57R

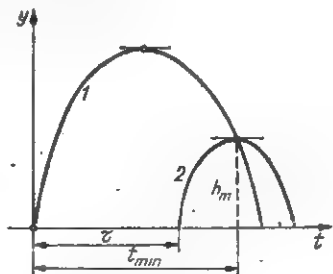


Fig. 1.2.58R

Condiția de minim pentru t este anularea derivatei :

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= \frac{(g\tau + v_{02})(g\tau - v_{01} + v_{02}) - (g\tau^2/2 + v_{02}\tau)g}{(g\tau - v_{01} + v_{02})^2} = \\ &= \frac{g^2\tau^2/2 - (v_{01} - v_{02})g\tau - v_{02}(v_{01} - v_{02})}{(g\tau - v_{01} + v_{02})^2} = 0 \end{aligned}$$

care dă rădăcinile :

$$\tau = \frac{1}{g} [v_{01} - v_{02} \pm \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}]. \quad (4)$$

Dacă $v_{01} > v_{02}$ avem o soluție reală pozitivă, deci există un minim :

$$\tau = \frac{1}{g} (v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}), \quad t_{\min} = \frac{1}{g} (v_{01} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}) \quad (5)$$

$$\text{și } h_m = \frac{1}{2g} v_{02}^2,$$

adică atunci când al doilea corp se află la înălțimea sa maximă. Acest lucru se vede direct, fără nici un calcul din figură.

$$1.2.60. R = (v_0^2 + g^2 \tau^2)^{3/2} : (g v_0) = 27,7 \text{ m.}$$

$$1.2.61. v = r\sqrt{g/(2h)} = 25 \text{ m/s.}$$

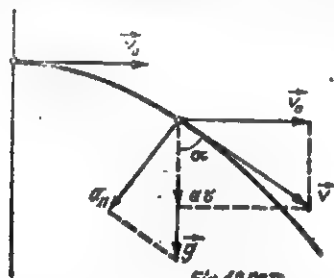


Fig. 12.55R

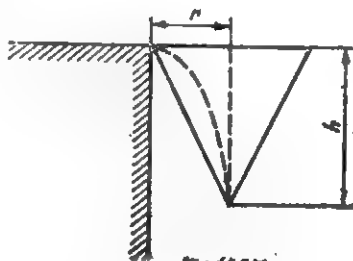


Fig. 12.57R

$$(*) \quad 1.2.62. v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \quad h = \frac{1}{2} gt^2, \quad b = vt, \quad (1)$$

de unde

$$b = v\sqrt{2h/g} = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)2h/g}. \quad (2)$$

Transcriind pe b sub forma :

$$b = \frac{1}{g} \sqrt{(v_0^2 - 2gh) \cdot 2gh}, \quad (3)$$

se vede imediat că sub radical suma celor doi factori variabili este constantă, deci maximul produsului lor are loc când ei sînt egali :

$$v_0^2 - 2gh = 2gh, \quad h_m = v_0^2 : (4g) = 3,6 \text{ m}, \quad b_{\max} = 2h_m = v_0^2/(2g) = 7,2 \text{ m.} \quad (4)$$

Desigur putem folosi calculul diferențial. Bătăia b este funcție de h . Condiția de extremum este anularea derivatei :

$$b(h) = \sqrt{2/g} \cdot \sqrt{v_0^2 h - 2gh^2}, \quad b'(h) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{v_0^2 - 4gh}{2\sqrt{v_0^2 h - 2gh^2}} = 0, \quad (5)$$

$$\text{de unde } h_m = \frac{v_0^2}{4g}, \text{ etc.}$$

De asemenea, putem observa că în expresia lui $b(h)$ sub radical avem o funcție pătratică (polinom de gradul doi) care se reprezintă printr-o parabolă, care are un maxim ($a = -2g < 0$) pentru

$$h = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{v_0^2}{2 \cdot (-2g)} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

$$1.2.63. t = \frac{1}{g} \sqrt{v_1 v_2} = 1,0 \text{ s.}$$

$$1.2.64. S = \pi v_0^4 / g^2 = 314 \text{ m}^2.$$

$$1.2.65. v_0 = \sqrt{g(b^2 + h^2)/(2h)} = 15,6 \text{ m/s.}$$

$$1.2.66. h_{\max} = h \cos^2 \alpha + (v_0^2 / (2g)) \sin^2 \alpha = 4,5 \text{ m.}$$

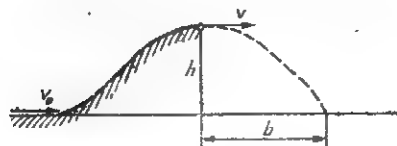


Fig. 1.2.62R

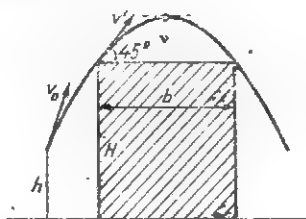


Fig. 1.2.67R

$$1.2.67. v_0 = \sqrt{g(b + 2H - 2h)} = 9,8 \text{ m/s, } \cos \alpha_0 = v' / (v_0 \sqrt{2}) = 0,226$$

$$\alpha_0 = 76^\circ 57' \quad d = \frac{1}{2g} v' (\sqrt{2} v_0 \sin \alpha_0 - v') = 0,59 \text{ m.}$$

$$1.2.68. h_1 = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha < h_2 = v_0^2 : (2g).$$

$$1.2.69. b = \frac{m}{F} v_0^2 \sin \alpha = 1,00 \text{ m.}$$

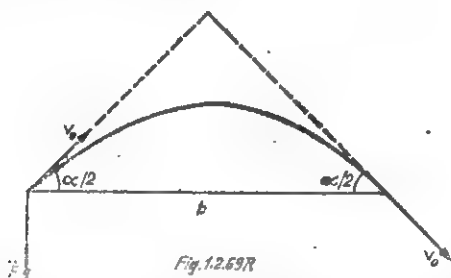


Fig. 1.2.69R

(**) 1.2.70. Prin identificare cu ecuația traiectoriei în cazul analog gravitațional ($a = |a_y|$):

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{1}{2} a x^2 : (v_0^2 \cos^2 \alpha_0), \quad (1)$$

rezultă:

$$h = \operatorname{tg} \alpha_0, \quad b = a : (2v_0^2 \cos^2 \alpha_0) = a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) / (2v_0^2) = a(1 + k^2) / (2v_0^2), \quad (2)$$

de unde

$$v_0 = a / \sqrt{(1 + k^2) / (2b)} = \sqrt{|a_y| (1 + k^2) / (2b)} = 5,0 \text{ m/s.} \quad (3)$$

Dar putem folosi o metodă mult mai puternică și mai generală cu ajutorul calculului diferențial și integral:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad dv_x = a_x dt; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad dv_y = a_y dt, \quad (4)$$

ceea ce dă în cazul nostru:

$$dv_x = 0, \quad \text{deci } v_x = \text{const} = v_{0x}, \quad v_y - v_{0y} = \int_0^t a_y dt = a_y t. \quad (5)$$

Dar

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v_x dt, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad dy = v_y dt, \quad (6)$$

ceea ce în cazul nostru dă, considerind că la momentul $t = 0$ avem $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$x = \int dx = \int v_x dt = \int_0^t v_{0x} dt = v_{0x} t, \quad (7)$$

$$y = \int v_y dt = \int (v_{0y} + a_y t) dt = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

Prin eliminarea lui t găsim ecuația traiectoriei:

$$y = x v_{0y} / v_{0x} + \frac{1}{2} a_y x^2 / v_{0x}^2 \quad (8)$$

și mai departe prin identificare, ca mai sus.

Dar pe de altă parte,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{v_y}{v_x}, \quad v_y = y'(x) v_x, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 (1 + y'^2). \quad (9)$$

Mai derivăm o dată:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{\frac{d}{dt} y'(x)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} (v_y / v_x)}{v_x} = \frac{\dot{v}_y / v_x - v_y \dot{v}_x / v_x^2}{v_x} = \\ &= \frac{a_y}{v_x^2} - \frac{a_x v_y}{v_x^3} = \frac{a_y}{v_x^2} - \frac{a_x y'(x)}{v_x^2}, \quad v_x^2 = \frac{a_y - a_x y'(x)}{y''}, \end{aligned} \quad (10)$$

deci

$$v^2 = v_x^2 (1 + y'^2) = \frac{1}{y''} (a_y - a_x y')(1 + y'^2). \quad (11)$$

În cazul nostru:

$$y'(x) = k - 2bx, \quad y'' = -2b, \quad a_x \equiv 0, \quad (12)$$

deci

$$v^2 = -\frac{1}{2b} a_y [1 + (k - 2bx)^2], \quad (13)$$

deci în origine ($x = 0$):

$$v_0^2 = -\frac{1}{2b} a_y (1 + k^2) = \frac{1}{2b} |a_y| (1 + k^2). \quad (14)$$

(*)1.2.71. a) Problema se poate rezolva elementar cu ajutorul noțiunii de „parabolă de siguranță” astfel: Să aruncăm bile cu aceeași viteză inițială v_0 sub diferite unghiuri α . Un punct (x, y) va fi atins de traiectorie dacă coordonatele sale verifică ecuația traiectoriei:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha - g x^2 : (2v_0^2 \cos^2 \alpha) = x \operatorname{tg} \alpha - g x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) / (2v_0^2) = \\ &= x m - g x^2 (1 + m^2) / (2v_0^2), \quad m = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Această ecuație are soluții reale pentru $m = \operatorname{tg} \alpha$ dacă discriminantul ei nu este negativ :

$$D = x^2 - (2gx^2/v_0^2)[y + gx^2/(2v_0^2)] \geq 0. \quad (2)$$

Pentru $D > 0$ punctul considerat (x, y) este atins de două traiectorii (parabole), pentru $D \leq 0$ punctul este inaccesibil, iar punctele corespunzătoare lui $D = 0$ sînt atinse de o singură parabolă, aceste puncte sînt situate pe curba

$$D = 0 \text{ sau } y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2) \quad (3)$$

numită „parabola de siguranță”, ea înfășoară toate parabolele (traiectoriile) posibile pentru diferite unghiuri α și aceeași viteză inițială v_0 . Punctele exterioare parabolei de siguranță sînt inaccesibile. Intersectînd parabola de siguranță cu $y = -h$ obținem b_{\max} :

$$-h = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2), \text{ de unde}$$

$$b_{\max} = x_{\max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 13,86 \text{ m.} \quad (4)$$

Introducînd în (1) găsim (știind că $D = 0$) :

$$m_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = x_{\max} : [2gx_{\max}^2/(2v_0^2)] = v_0 : \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 = 35^\circ 16' \quad (5)$$

și

$$t_m = x_{\max} : (v_0 \cos \alpha_0) = \frac{1}{v_0} x_{\max} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \frac{1}{g} \sqrt{2(v_0^2 + gh)} = 1,73 \text{ s.} \quad (6)$$

b) Ecuația parabolei de siguranță se poate obține și cu ajutorul calculului diferențial știind că ea este înfășurătoarea tuturor parabolelor (1) pentru diferite valori ale parametrului m . Fie ecuația acestor curbe ale familiei :

$$F(x, y, m) = y - xm + gx^2(1 + m^2)/(2v_0^2) = 0. \quad (7)$$

Două curbe infinit vecine se intersectează într-un punct care la limită este punctul de tangență cu înfășurătoarea :

$$F(x, y, m) = 0, \quad F(x, y, m + \Delta m) = 0 \text{ cu } \Delta m \rightarrow 0. \quad (8)$$

În locul celei de-a doua ecuații din sistemul (4) putem scrie diferența ecuațiilor :

$$F(x, y, m + \Delta m) - F(x, y, m) = 0.$$

Împărțind la Δm și trecînd la limită găsim, prin definiție, derivata (parțială) :

$$\frac{\partial F(x, y, m)}{\partial m} = 0. \text{ Prin urmare avem sistemul :}$$

$$F(x, y, m) = 0 \text{ și } \frac{\partial F(x, y, m)}{\partial m} = 0. \quad (9)$$

Eliminînd parametrul m din aceste două ecuații găsim ecuația înfășurătoarei familiei de curbe $F(x, y, m) = 0$.

În cazul nostru, derivînd (7) :

$$\frac{\partial F(x, y, m)}{\partial m} = -x + gx^2 m/v_0^2 = 0, \quad m = \frac{v_0^2}{gx}, \quad (10)$$

care introdus în (7) ne dă ecuația parabolei de siguranță (3).

c) O a treia cale de rezolvare este următoarea. Punem condiția ca traiectoria (1) să treacă prin punctul $(b, -h)$ și obținem :

$$F(b, m) = -h - bm + gb^2(1 + m^2)/(2v_0^2) = 0. \quad (11)$$

Din această ecuație putem afla, în principiu, bătaia b ca funcție de $m = \text{tg} \alpha$, adică $b = f(m)$. Condiția de extremum pentru b este anularea derivatei $f'(m)$. Această derivată se poate calcula prin derivarea funcției de mai sus $F(b, m)$ în raport cu m în care însă $b = f(m)$, deci trebuie să cunoaștem derivarea parțială și derivarea funcției de funcție:

$$\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{db}{dm} = 0, \text{ de unde } \frac{db}{dm} = - \frac{\partial f}{\partial m} : \frac{\partial F}{\partial m}. \quad (12)$$

Prin urmare, condiția de extremum $\frac{db}{dm} = 0$ devine

$$\frac{\partial F(b, m)}{\partial m} = 0, \text{ adică } -b + gb^2 \cdot 2m/(2v_0^2) = 0, \text{ de unde} \quad (13)$$

$$m_0 = \text{tg} \alpha_0 = v_0^2/(gb)$$

și ecuația traiectoriei devine:

$$-h - b \cdot v_0^2/(gb) + \frac{1}{2v_0^2} gb^2[1 + v_0^4/(g^2b^2)] = 0, \quad (14)$$

de unde

$$b_{\max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 13,86 \text{ m} \quad (15)$$

și deci din (13):

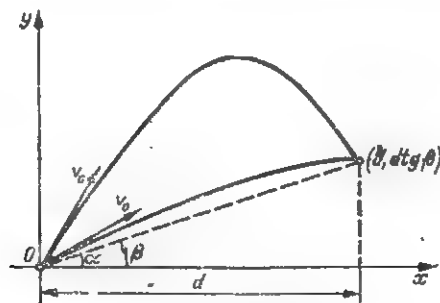
$$m_0 = \text{tg} \alpha_0 = v_0^2/(gb_{\max}) = v_0 : \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 1/\sqrt{2}. \quad (16)$$

$$1.2.72. t = \frac{1}{g} v_0 \cos \alpha_0 (\text{tg} \alpha_0 - \text{tg} \alpha) = 0,60 \text{ s}, y = \frac{1}{2g} v_0^2 \cos^2 \alpha_0 (\text{tg}^2 \alpha_0 - \text{tg}^2 \alpha) = 6,5 \text{ m}.$$

$$1.2.73. d = 2v_0 t \sin(\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 5,17 \text{ m}.$$

$$1.2.74. \text{tg} \alpha = \frac{1}{gd} \pm \sqrt{v_0^4/(g^2d^2) - (2v_0^2 \text{tg} \beta)/(gd)} - 1 = 2 \pm 1,6,$$

$$\alpha = 74^\circ 29' \text{ sau } 21^\circ 48'; v_0 \geq \sqrt{(gd/\cos \beta)(\sin \beta + 1)} = 209 \text{ m/s}.$$



(**)1.2.75. a) Teorema variației impulsului sub forma $\vec{F}_m \Delta t = m \Delta \vec{v}$ proiectată pe axa verticală Oy și luată de la momentul lansării $t = 0$ până la momentul cînd corpul atinge înălțimea maximă $t = t_u$ și apoi de la acest moment pînă la momentul revenirii pe Pămînt $t = t_u + t_c$ ne dă

$$(-mg - kv_y)^{(0,t_u)} \cdot t_u = -mv_0 \text{ sau } (-mg - kv_y^{(0,t_u)}) t_u = -mv_0 \quad (1)$$

sau

$$-mgt_u - k\bar{v}_y^{(0,t_u)} \cdot t_u = -mv_0 \quad (2)$$

dar

deci

$$\bar{v}_y^{(0,t_u)} \cdot t_u = h_m - \text{înălțimea maximă}, \quad (3)$$

$$-mgt_u - kh_m = -mv_0. \quad (4)$$

La fel pentru coborire:

$$(-mg - k\bar{v}_y^{(t_u,t_v)}) \cdot t_v = -mv', \text{ dar } \bar{v}_y^{(t_u,t_v)} \cdot t_v = -h_m,$$

deci

$$-mgt_v + kh_m = -mv'. \quad (5)$$

Prin adunarea celor două ecuații (4) și (5) rezultă:

$$t = t_u + t_v = \frac{1}{g}(v_0 + v') = 2,0 \text{ s}. \quad (6)$$

Mai general, cu ajutorul calculului diferențial și integral:

$$\int_1^2 \vec{F} dt = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (7)$$

proiectat pe axa Oy dă:

$$\int_0^{t_u} (-mg - kv_y) dt = -mv_0, \text{ dar } \int_0^{t_u} v_y dt = h_m, \quad (8)$$

deci

$$-mgt_u - kh_m = -mv_0. \quad (4)$$

La fel:

$$\int_{t_u}^{t_u+t_v} (-mg - kv_y) dt = -mv', \text{ dar } \int_{t_u}^{t_u+t_v} v_y dt = -h_m, \quad (9)$$

deci

$$-mgt_v + kh_m = -mv', \quad (5)$$

de unde rezultă ca mai sus timpul total cerut.

b) Teorema variației energiei mecanice:

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = L_{necons}. \quad (10)$$

ne dă pentru întregul proces de mișcare ($\Delta E_p = 0$):

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = L_{necons.} = -\bar{F}_f \cdot (t_u + t_v), \quad (11)$$

de unde

$$\bar{F}_f = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv'^2 \right) : \left[\frac{1}{g}(v_0 + v') \right] = \frac{1}{2}mg(v_0 - v') = 9,8 \text{ W}. \quad (12)$$

(*) 1.2.76. Vom folosi rezultatele problemei 1.2.71. Intersectăm parabola de siguranță

$$y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2) \quad (1)$$

cu „podeaua” $y = -h$ și obținem:

$$x_{\max} = \frac{1}{g}v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh} = 22 \text{ m} \quad (2)$$

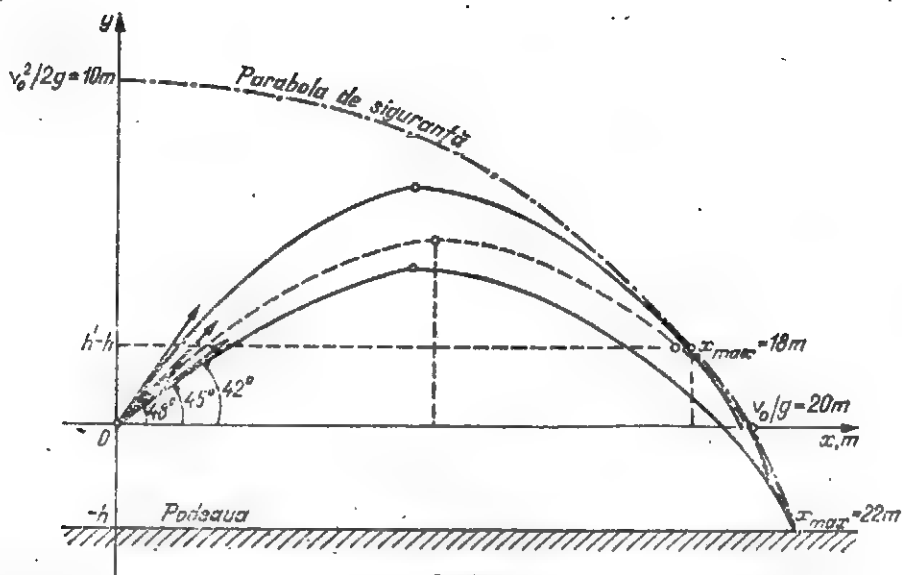


Fig.1.2.76R

și din ecuația traiectoriei $-h = xm - gx^2(1 + m^2)/(2v_0^2)$, știind că $D = 0$, rezultă :

$$m_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = 1 : \sqrt{1 + 2gh/v_0^2} = \frac{1}{1,1}, \quad \alpha_0 = 42^\circ. \quad (3)$$

Reamintim că bătaia maximă la nivelul punctului de lansare se obține pentru $\alpha = 45^\circ$.

Analog în cazul coșului $y = h' - h$:

$$x_{\max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 - 2g(h' - h)} = 18 \text{ m}, \quad (4)$$

$$m_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = 1 : \sqrt{1 - 2g(h' - h)/v_0^2} = \frac{1}{0,90}, \quad \alpha_0 = 48^\circ. \quad (5)$$

Să vedem acum dacă există restricție din partea tavanului.

$$\sin^2 \alpha = 1 : (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = 1 : (2 + 2gh/v_0^2) = \frac{1}{2,21}, \text{ resp. } \frac{1}{1,81}. \quad (6)$$

$$h_{\max} = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha = 4,5 \text{ m, resp. } 5,5 \text{ m}, \quad (7)$$

deci înălțimea necesară a sălii de sport :

$$H_{\text{nec}} = h + h_{\max} = 6,6 \text{ m, resp. } 7,6 \text{ m}. \quad (8)$$

În cazul sălii $H = 4,6 \text{ m} < H_{\text{nec}}$ trebuie să reluăm problema :

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha' = H - h, \quad \alpha' = 30^\circ \quad (9)$$

și din ecuația traiectoriei

$$-h = x \operatorname{tg} \alpha' - gx^2 : (2v_0^2 \cos^2 \alpha'), \text{ (respectiv } = h' - h) \quad (10)$$

obținem

$$x_{\max} = 20,4, \text{ (resp. } 12,9 \text{ m).}$$

În cazul sălii $H = 7,0$ m, pentru aruncarea în coș ecuația (9) dă $\alpha' = 44^\circ 26'$ și (10) dă $x_{\max} = 17,6$ m.

$$1.2.77. b = \frac{1}{g} v_0^2 (1 - f^2) = 1,53 \text{ m.}$$

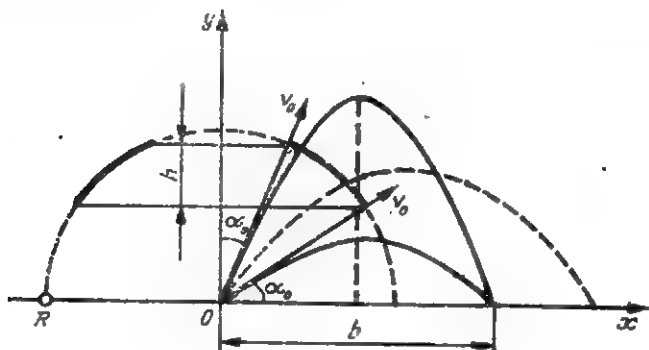


Fig. 1.2.77R

$$1.2.78. \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{d}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad v_0 \geq \sqrt{g(H^2 + d^2)/(2H)} = 18,4 \text{ m/s.}$$

1.2.79. $x \approx h\sqrt{2h/g} \cdot \omega \cos \varphi = 0,71$ m. Calculul mai riguros dă un coeficient $2/3$.

Forțe de frecare

1.2.80. Da : o ladă așezată liber pe platforma unui vagon care accelerează.

$$1.2.81. T = F_1 + (F_2 - F_1)x/l.$$

$$1.2.82. F_{\max} = T_r(m_1 + m_2)/m_2 = 200 \text{ N.}$$

$$1.2.83. a_r = \mu g M : (M - m) = 0,056 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.84. v' = \frac{1}{n} v_0 (n - f) : (1 - f) = 100 \text{ km/h.}$$

$$1.2.85. T_2 = F - T_1 = 70 \text{ N.}$$



Fig. 1.2.85R

$$1.2.86. F_c = \mu mg(1 + m/M) = 49 \text{ N.}$$

$$1.2.87. a_1/a_2 = [F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)] : [F \cos \alpha - \mu(mg + F \sin \alpha)] = 1,65.$$

$$1.2.88. F = [ma \cos \varphi + mg \sin(\alpha + \varphi)] : \cos(\beta - \varphi), \text{ rezultă } \varphi = \beta = 15^\circ.$$

$$1.2.89. F = g(m + M)(\mu_1 + \mu_2) \cos \varphi_1 : \cos(\alpha - \varphi_1) \text{ este minim pentru } \alpha = \varphi_1,$$

$$F_{\min} = g(m + M)(\varphi_1 + \varphi_2) : \cos \varphi_2 = 138,5 \text{ N.}$$

$$1.2.90. t = \sqrt{2l : (a - \mu g)} = 2,0 \text{ s.}$$

$$1.2.91. a) F = mg(1 + m/M) = 5,39 \text{ N.}$$

$$b) t = \sqrt{2l : (F/m - \mu g - \mu g m/M)} = 0,52 \text{ s.}$$

1.2.92. Se rupe firul legat de corpul tras : a) $F = T_1 + \mu_3 mg = 5,0 \text{ N}$ (static), b) $F = \frac{3}{2} T_1 + \frac{mg}{2} (2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) = 7,5 \text{ N}$, ($a = 0,53 \text{ m/s}^2$).

1.2.93. $k' = k : (2-k) = 3,0$, ($k < 2$).

1.2.94. $T_1 = mg = 9,8 \text{ N}$, $F_{f1} = \mu m_1 g = 6,86 \text{ N}$, $T_2 = T_1 - \mu m_1 g = 3,0 \text{ N} = F_{f2}$.

1.2.95. $a = g(m/M - \mu) = 2,0 \text{ m/s}^2$.

1.2.96. $t_0 = \mu \frac{g}{c} (m_1 + m_2) = 5,0 \text{ s}$, $t = \frac{g}{c} (nm_2 + \mu m_1) = 10,0 \text{ s}$.

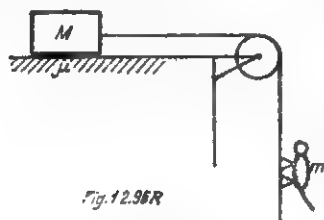


Fig.12.96R

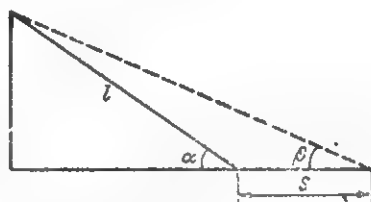


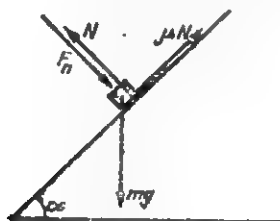
Fig.12.98R

1.2.97. $v_0 = [2lg(\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)/m_2]^{1/2} = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

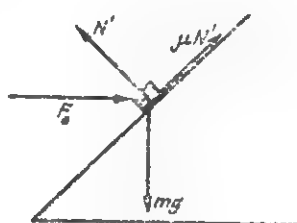
1.2.98. $\varphi = \beta = 6,0^\circ$.

1.2.99. $\mu = \frac{n-1}{n+1} \tan \alpha = 0,33$.

1.2.100. $\mu = \frac{\cos \alpha}{n - \sin \alpha} = 0,43$.



a



b

Fig.1.2.100R

1.2.101. $\mu = \tan \frac{\alpha}{2} = 0,27$.

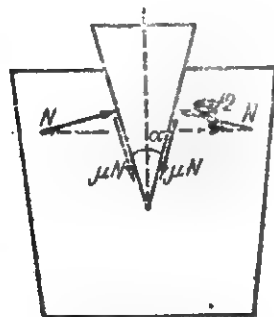
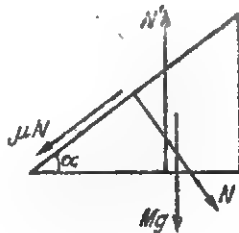
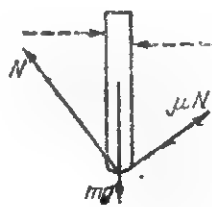


Fig.1.2.101R



a



b

Fig.1.2.106R

$$1.2.102. a = \frac{F}{m} \left(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \frac{mg - F \sin \alpha_2}{mg - F \sin \alpha_1} \right) = 0,82 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.103. a = F \cos(\alpha - \varphi) : (m \cos \varphi) - g \tan \varphi = \max \text{ pentru } \alpha = \varphi = 18^\circ.$$

$$1.2.104. l_2/l_1 = \cos \alpha + \mu \sin \alpha = 1,00.$$

$$1.2.105. s = \frac{1}{2g} v_0^2 \cos \varphi : \sin(\alpha + \varphi) = \min \text{ dac\u0103 } \alpha = 90^\circ - \varphi = 60^\circ.$$

$$1.2.106. \mu = \tan \alpha = 0,27, \quad N = mg \cos \alpha = 4,73 \text{ N}.$$

$$1.2.107. \mu = \tan \alpha [(1+f)^2 - 1] : [(1+f)^2 + 1] = 0,38, \quad v_0/v' = 1 + f = 1,50; \quad -a_u/a_c = (1+f)^2 = 2,25.$$

$$1.2.108. g \tan(\alpha - \varphi) = 2,6 \text{ m/s}^2 < a < g \tan(\alpha + \varphi) = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.109. F_{\min} = mgtg(\alpha + \varphi) : [\sin \alpha tg(\alpha + \varphi) + \cos \alpha - m/(m+M)] = 113,2 \text{ N},$$

$$F_{\max} = Mg \operatorname{ctg} \alpha : (1 - \cos \alpha) = 731,5 \text{ N}.$$

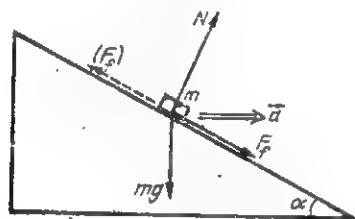
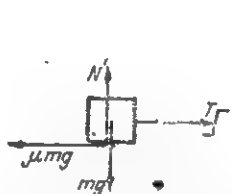
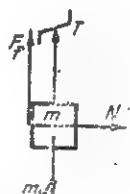


Fig. 12.108R



a



b

$$1.2.110. F = \mu(m+M)g : (1 + M/m - \cos \alpha) = 9,8 \text{ N}.$$

$$1.2.111. a_{\min} = g(1 - \mu) : (1 + \mu) = 0,25 g, \quad a_{\max} = g(1 + \mu) : (1 - \mu) = 4,0 g.$$

$$1.2.112. s = \frac{1}{2g} v_0^2 2m(m+M) : (m + \mu M)^2 = 2,18 \text{ m}.$$

$$1.2.113. 1 - 4\mu = 0,20 \leq m_1/m_2 \leq 1 + 4\mu = 1,80.$$

$$1.2.114. \mu = \tan \alpha \sin \frac{\beta}{2} = 0,29.$$

$$1.2.115. \text{Cu fr\u00e2n\u0103 de motor: } g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < a < g \sin \alpha, \quad 0,49 \text{ m/s}^2 < a < 0,98 \text{ m/s}^2; \text{ cu for\u0163\u0103 de trac\u0163iune: } g \sin \alpha < a < g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad 0,98 \text{ m/s}^2 < a < 1,47 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.116. t_{\min} = 2 \sqrt{\frac{l}{g} : \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}} = 17,7 \text{ s}.$$

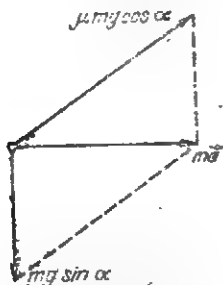


Fig. 12.116R

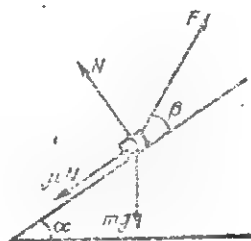


Fig. 12.117R

1.2.117. $F = m[a \cos \varphi + g \sin(\alpha + \varphi)] : \cos(\beta - \varphi) = \min$ pentru $\beta = \varphi = 15^\circ$;

$F_{\min} = ma \cos \varphi + mg \sin(\alpha + \varphi)$ și $N \geq 0$ implică

$$a \leq g \cos(\alpha + \varphi) : \sin \varphi = 26,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

altfel ($N = 0$) și $\text{tg} \beta = g \cos \alpha : (g \sin \alpha + a)$, $\beta = 13^\circ 38' < \varphi$.

1.2.118. $v_0 = v_0 / \sin(\alpha' - \varphi) : \sin(\alpha - \varphi) = 100 \text{ km/h}$.

1.2.119. $a = g(1 + m/M) \sin(\alpha - \varphi) : \cos \varphi = 4,5 \text{ m/s}^2$ în jos (scindura lunecă în sus), resp. $-1,43 \text{ m/s}^2$ în sus (scindura lunecă în jos).

1.2.120. $a = g \sin \alpha - g \text{tg} \theta \cos \alpha$, $\text{tg} \theta = \mu$, $\theta = \varphi = 5,0^\circ$ (înainte),

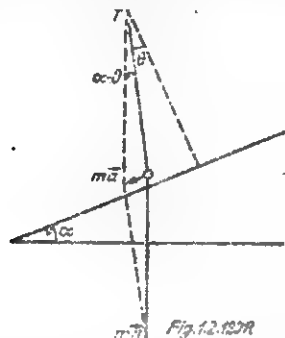


Fig. 12.120R

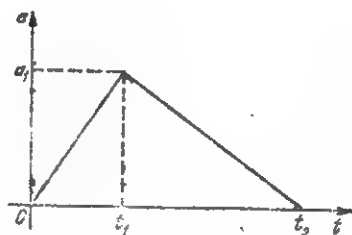


Fig. 12.123T

1.2.121. $h = \frac{1}{2g} v_0^2 : (1 - \mu \text{tg} \alpha) \approx \frac{1}{2g} v_0^2 \alpha : (\alpha - \varphi) = 40 \text{ m}$, după aceasta camionul va luneca în jos.

1.2.122. $t = \sqrt{2l : (g \sin \alpha)} = 0,60 \text{ s}$ și scindura va sta în repaus.

1.2.123. $a = ct \cos \alpha : (m + M)$ pentru

$$t \leq t_1 = \frac{1}{c} \mu mg (m + M) : [\mu m \sin \alpha + M(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)] = 3,27 \text{ s},$$

$$a \leq a_1 = \frac{1}{M} \mu mg [M \cos \alpha] : [\mu m \sin \alpha + M(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)] = 0,707 \text{ m/s}^2,$$

apoi $a = \frac{\mu}{M} (mg - ct \sin \alpha)$ până la $t_2 = \frac{mg}{c \sin \alpha} = 19,8 \text{ s}$ când $a = 0$.

1.2.124. a) $a_1 = 0$, $F_{f2} = 0$ dacă $F < \mu_1 m_1 g : (1 - \mu_1) = 4,9 \text{ N} = F_1$.

b) $F > F_1$, $a_{2v} \leq 0$, $a_1 = [(1 - \mu_1)F - \mu_1 m_1 g] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_1 \mu_2)]$.

c) $a_{2v} = 0$, F_{f2} staționară, $a_1 = [F - \mu_1 (m_1 + m_2)g] : (m_1 + m_2)$;

$F_{2,3} = [m_2(m_1 + m_2)(1 \pm \mu_1 \mu_2)g] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_1 \mu_2)] = 9,34 \text{ N}$, resp. $10,4 \text{ N}$;

$a_{1(2,3)} = g[m_2 - \mu_1(m_1 + m_2)] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_1 \mu_2)] = 1,15 \text{ m/s}^2$, resp. $1,51 \text{ m/s}^2$.

1.2.125. $F = m_1 m_2 (2g - w) : (m_1 + m_2) = 11,76 \text{ N}$, $T = 2F$, $a_1 = [(m_1 - m_2)g + m_2 w] : (m_1 + m_2) = 5,88 \text{ m/s}^2$, $a_2 = [(m_2 - m_1)g + m_1 w] : (m_1 + m_2) = 3,92 \text{ m/s}^2$.

1.2.126. $v' = \sqrt{(n^2 - 1)v_0^2 + n^2 v^2} = 3,20 \text{ m/s}$.

$$1.2.127. \mu = \frac{kl_0(\text{tg} \alpha - \sin \alpha)}{mg - kl_0(1 - \cos \alpha)} = 0,20.$$

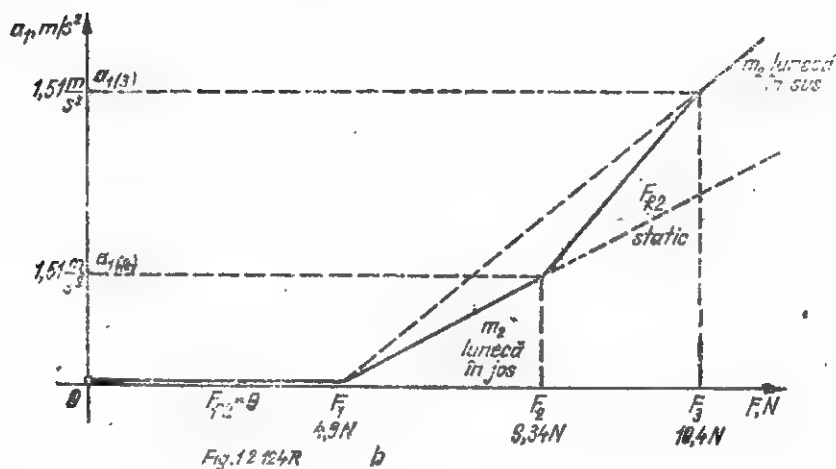
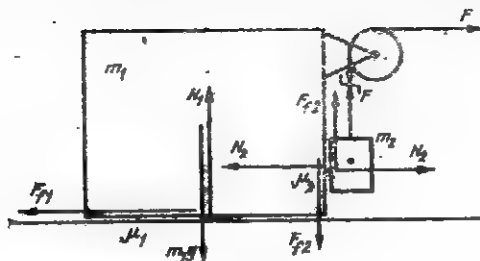


Fig. 1.2.125R

**** 1.2.128.** $v = \frac{dx}{dt}$, $dx = v dt$, $\Delta x = \int dx = \int_0^{t_0} v dt = S$, (1)

unde S este aria mărginită de curba $v(t)$. Știind că aria unei elipse este πab , unde a, b sînt semiaxele, avem

$$\Delta x = v_0 t_0 - \frac{1}{2} \pi \frac{1}{2} t_0 \cdot v_0. \quad (2)$$

Dar $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_0}$,

deci $v_0 = \bar{v} : (1 - \pi/4) = 40 \text{ m/s}$. (3)

*** 1.2.129.** $v_1 = \frac{dx_1}{dt} = A + 2Bt$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt} = C + 2Dt + 3Et^2$, (1)

$$v_r = v_1 - v_2 = A - C + 2(B - D)t - 3Et^2. \quad (2)$$

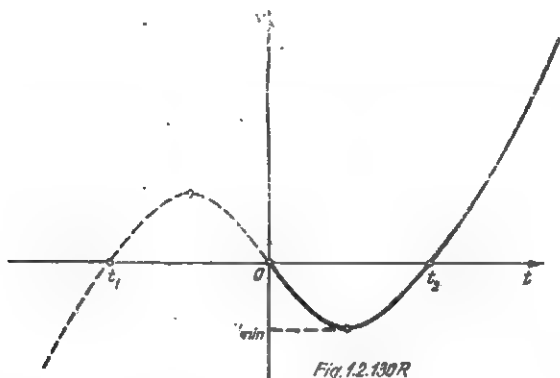
$$* 1.2.130. v = \frac{dx}{dt} = 4At^3 - 2Bt \quad (1)$$

este o funcție impară $v(-t) = -v(t)$, deci are originea, centru de simetrie. Condiția de extremum pentru $v(t)$ este anularea derivatei :

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 12At^2 - 2B = 0, \quad t = \pm \sqrt{B/(6A)}. \quad (2)$$

Între rădăcinile (2) semnul derivatei este negativ, deci prima rădăcină corespunde unui maxim al vitezei, iar a doua unui minim. Ne interesează de fapt $t \geq 0$. Natura extremelor rezultă și din semnul derivatei a doua :

$$v''(t) = 24At, \quad v''(t_{1,2}) = 24At_{1,2} \leq 0. \quad (3)$$



* 1.2.131. Conform definiției :

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{s}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (At + Bt^2) dt = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} A \tau^2 + \frac{1}{3} B \tau^3 \right) = \\ &= \frac{1}{2} A \tau + \frac{1}{3} B \tau^2. \end{aligned}$$

$$* 1.2.132. v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'(t) = -b \frac{1}{t^2}, \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dx} = \dot{v} = v'(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = x''(t) = 2b \frac{1}{t^3}. \quad (2)$$

$$** 1.2.133. a = \frac{dv}{dt}, \quad dv = a dt, \quad \int dv = v = \int a dt = \int At^2 dt = \frac{1}{3} At^3 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$, deci $C = 0$,

$$v = \frac{1}{3} At^3. \quad (1)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v dv = v = \int_0^t At^2 dt = \frac{1}{3} At^3.$$

Integrăm mai departe :

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v dt, \quad \int dx = x = \int v dt = \int \frac{1}{3} A t^3 dt = \frac{1}{12} A t^4 + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = 0$ și $x = 0$, deci $C' = 0$:

$$x = \frac{1}{12} A t^4. \quad (2)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{1}{3} A t^3 dt = \frac{1}{12} A t^4.$$

**** 1.2.134.** Observăm că dacă accelerația ar fi $a = -\omega^2 x$ (cu minus !), atunci am avea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ — binecunoscuta ecuație diferențială a oscilatorului armonic ! În cazul problemei noastre : $a = \frac{dv}{dt} = \omega^2 x$.

Înmulțim ambii membri ai ecuației cu dx :

$$\frac{dv}{dt} dx = \omega^2 x dx \text{ sau } v dv = \omega^2 x dx. \quad (1)$$

Dealtfel aceasta este forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice :

$$dL = F dx = dE_c \text{ sau } m a dx = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v dv. \quad (2)$$

Integrăm :

$$\int v dv = \int \omega^2 x dx, \quad \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } x = 0 \text{ corespunde } v = v_0 : \quad \frac{1}{2} v_0^2 = C,$$

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 x^2, \quad v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}. \quad (3)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^v v dv = \int_0^x \omega^2 x dx, \quad \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2. \quad (4)$$

Mai departe

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}. \quad (5)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}}, \quad t = \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}} = \\ &= \int \frac{dx}{\omega \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}} = \frac{1}{\omega} \ln(x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}) + C, \end{aligned} \quad (6)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } x = 0 : 0 = \frac{1}{\omega} \ln (v_0/\omega) + C, \text{ rezultă}$$

$$t = \frac{1}{\omega} \ln \frac{x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}}{v_0/\omega} = \frac{1}{\omega} \ln \frac{\omega x + \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}}{v_0}. \quad (7)$$

Se putea integra și definit :

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega} \ln(x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}) \Big|_0^x = \\ &= \frac{1}{\omega} \ln \frac{x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}}{v_0/\omega}. \end{aligned} \quad (8)$$

Rezolvăm (7) în raport cu x :

$$\begin{aligned} \omega x + \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2} &= v_0 e^{\omega t}, \quad v_0^2 + \omega^2 x^2 = (v_0 e^{\omega t} - \omega x)^2, \\ x &= \frac{1}{2} \frac{v_0}{\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t, \end{aligned} \quad (9)$$

unde apare funcția *sinus hiperbolic* sh. Dealtfel cine cunoaște funcțiile hiperbolice, putea scrie integrala (6) așa :

$$t = \int \frac{dx}{\omega \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}} = \frac{1}{\omega} \operatorname{argsh} \frac{\omega x}{v_0} + C', \quad (10)$$

unde apare „argument sinus hiperbolic”, iar constanta de integrare C' se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$, și deoarece $\operatorname{argsh} 0 = 0$, rezultă $C' = 0$:

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{argsh} \frac{\omega x}{v_0}, \text{ de unde } \frac{\omega x}{v_0} = \operatorname{sh} \omega t, \quad (11)$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t = \frac{v_0}{\omega} \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}). \quad (12)$$

Legea vitezei rezultă din (3) și (9) :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + \omega^2 \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} (e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t})} = v_0 \frac{1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \\ &= v_0 \operatorname{ch} \omega t, \end{aligned} \quad (13)$$

unde apare „cosinus hiperbolic” ch. Dealtfel legea vitezei se poate obține direct prin derivarea legii mișcării (9) (derivata sinusului hiperbolic este cosinusul hiperbolic și derivata cosinusului hiperbolic este sinusul hiperbolic).

$$** \text{ 1.2.135. a) } a = \frac{dv}{dt}, \quad dv = a dt. \quad (1)$$

Integrăm (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt, \quad v - v_0 = \int_0^t f(t) dt, \quad (2)$$

de aici obținem, punind $t = t_m$, deci $v = 0$:

$$\begin{aligned} -v_0 &= \int_0^{t_m} f(t) dt, \text{ deci } v = \int_0^t f(t) dt - \int_0^{t_m} f(t) dt = \\ &= -\int_t^{t_m} f(t) dt = -\int_t^{t_m} f(t) dt = -\int_t^{t_m} f(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

$$b) v = \frac{dx}{dt}, dx = v dt, \int_0^{x_m} dx = \int_0^{t_m} v dt \text{ sau } x_m = \int_0^{t_m} v dt. \quad (4)$$

Integrăm prin părți:

$$x_m = \int_0^{t_m} v dt = vt \Big|_0^{t_m} - \int_0^{t_m} t dv = -\int_0^{t_m} t \cdot a dt = -\int_0^{t_m} t f(t) dt. \quad (5)$$

Primul termen de la integrarea prin părți dispăre fiindcă pentru $t = t_m$ avem $v = 0$.

$$* 1.2.136. v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'(t) = A - 3Bt^2. \quad (1)$$

Condiția de oprire:

$$v = 0 = A - 3Bt^2, \quad t = \sqrt{A/(3B)}. \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6Bt, \quad F_f = ma = -6mBt, \quad (3)$$

dar

$$F_0 = -6mB/\sqrt{A/(3B)} = -\frac{6}{\sqrt{3}} m \sqrt{AB}, \quad m = -\frac{\sqrt{3}}{6} F_0 / \sqrt{AB}, \quad (4)$$

care introdusă în (3) dă legea cerută:

$$F_f = \sqrt{3} F_0 \sqrt{B/A} \cdot t. \quad (5)$$

$$* 1.2.137. t = \sqrt{(2l/g) : (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = \sqrt{(2b/g) : [\cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)]}. \quad (1)$$

Minimul timpului t corespunde maximului numitorului de sub radical. Anulăm derivata acestuia:

$$-\sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 0. \quad (2)$$

$$\text{sau } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2\mu \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\mu} \quad \text{sau} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = -\mu. \quad (4)$$

Trebuie luat 2α în cadranul doi, fiindcă α este evident în cadranul 1. Derivata a doua:

$$-2 \sin 2\alpha + 2\mu \cos 2\alpha \quad (5)$$

și înlocuind pe μ din (4) găsim: $-2/\sin 2\alpha < 0$, deci numitorul are un maxim și timpul t are un minim:

$$t_{\min} = \sqrt{(4b/g) : (1 + \sqrt{1 + \mu^2})}. \quad (6)$$

$$* 1.2.138. a) v = \frac{dx}{dt} = 2At - 3Bt^2. \quad (1)$$

Condiția de oprire :

$$\begin{aligned} v &= 0 = 2At - 3Bt^2, \\ t_m &= 2A/(3B). \end{aligned} \quad (2)$$

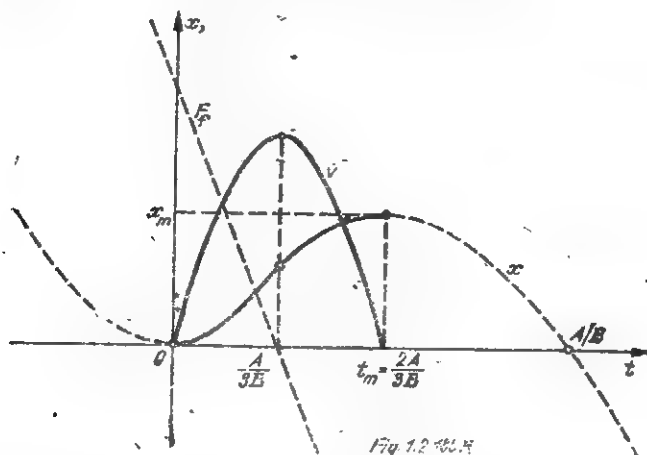


Fig. 1.2.139

Distanța pînă la oprire :

$$x_m = At_m^2 - Bt_m^3 = 4A^3 : (27B^2). \quad (3)$$

$$b) \quad a = \frac{dv}{dt} = 2A - 6Bt, \quad F = ma = 2m(A - 3Bt). \quad (4)$$

Pînă la momentul $t_0 = A/(3B)$ vehiculul merge accelerat, apoi merge frînat. c) Vd. figura.

** 1.2.139. Principiul II al dinamicii se scrie :

$$F = F_0 \cos \omega t = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$mdv = F_0 \cos \omega t \, dt,$$

$$\int mdv = \int F_0 \cos \omega t \, dt, \quad mv = \frac{1}{\omega} F_0 \sin \omega t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $v = 0$, rezultă $C = 0$:

$$v = \frac{1}{m\omega} F_0 \sin \omega t, \quad v_{\max} = \frac{1}{m\omega} F_0. \quad (2)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v mdv = mv = \int_0^t F_0 \cos \omega t \, dt = F_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^t = \frac{1}{\omega} F_0 \sin \omega t.$$

Continuăm integrarea :

$$dx = vdt, \quad \int dx = \int \frac{1}{m\omega} F_0 \sin \omega t \, dt,$$

$$x = \frac{1}{m\omega^2} F_0 (-\cos \omega t + C'),$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 1$:

$$x = \frac{1}{m\omega^2} F_0 (1 - \cos \omega t). \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{1}{m\omega} F_0 \sin \omega t dt = -\frac{1}{m\omega^2} F_0 \cos \omega t \Big|_0^t,$$

Se vede că mișcarea este *oscilatorie armonică* cu frecvența unghiulară ω , în jurul punctului de echilibru :

$$x_0 = \frac{1}{m\omega^2} F_0 = \frac{1}{k} F_0, \quad k = m\omega^2 \quad (4)$$

cu amplitudinea

$$A = \frac{1}{m\omega^2} F_0 = \frac{1}{k} F_0. \quad (5)$$

Forța aplicată se poate scrie și astfel :

$$F = F_0 \cos \omega t = F_0 - kx. \quad (6)$$

$$** \text{ 1.2.140. a) } F + F_r = F - kv = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{mdv}{F - kv}, \quad \int dt = t = \int \frac{mdv}{F - kv} = \\ &= -\frac{m}{k} \int \frac{-kdv}{F - kv} = -\frac{m}{k} \ln(F - kv) + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k} \ln F + C, \quad C = \frac{m}{k} \ln F, \quad (2)$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln \frac{F - kv}{F}, \quad v = \frac{F}{k} (1 - e^{-kt/m}).$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k} \int_0^v \frac{-kdv}{F - kv} = -\frac{m}{k} \ln \frac{F - kv}{F}.$$

Integrăm mai departe :

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \quad \int dx = x = \int \frac{F}{k} (1 - e^{-kt/m}) dt = \\ &= \frac{F}{k} t + \frac{F}{k} \frac{m}{k} e^{-kt/m} + C', \end{aligned}$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = \frac{Fm}{k^2} + C', \quad C' = -\frac{Fm}{k^2},$$

$$x = \frac{F}{k} t + \frac{Fm}{k^2} (e^{-kt/m} - 1). \quad (3)$$

Se poate integra și definit astfel:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{F}{k} (1 - e^{-kt/m}) dt = \frac{F}{k} t \Big|_0^t + \frac{Fm}{k^2} e^{-kt/m} \Big|_0^t =$$

$$= \frac{F}{k} t + \frac{Fm}{k^2} (e^{-kt/m} - 1).$$

$$b) F - kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad (4)$$

separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{m dv}{F - kv^2} = \frac{m}{k} \frac{dv}{F/k - v^2}.$$

Amintim integrala:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad (5)$$

unde „argument tangenta hiperbolică” $\operatorname{argth} \frac{x}{a}$ este funcția inversă „tangentei hiperbolice”

$$\operatorname{th} \frac{x}{a} = (e^{x/a} - e^{-x/a}) : (e^{x/a} + e^{-x/a}) = \operatorname{sh} \frac{x}{a} : \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

În cazul nostru:

$$\int dt = t = \frac{m}{k} \int \frac{dv}{F/k - v^2} = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{k}{F}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{F}} + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$ ($\operatorname{argth} 0 = 0$); rezultă $C = 0$,

$$t = \frac{m}{\sqrt{kF}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{F}}, \quad v = \sqrt{\frac{F}{k}} \operatorname{th} \frac{t}{m} \sqrt{kF}. \quad (6)$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^t dt = t = \frac{m}{k} \int_0^v \frac{dv}{F/k - v^2} = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{k}{F}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{F}} \Big|_0^v = \frac{m}{\sqrt{kF}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{F}}.$$

Continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \quad \int dx = x = \int \sqrt{\frac{F}{k}} \operatorname{th} \frac{t}{m} \sqrt{kF} \cdot dt.$$

Amintim integrala:

$$\int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax, \quad (7)$$

unde „cosinusul hiperbolic”

$$\operatorname{ch} ax = \frac{1}{2} (e^{ax} + e^{-ax}).$$

În cazul nostru :

$$x = \sqrt{\frac{F}{k}} \int \operatorname{th} \frac{t}{m} \sqrt{kF} dt = \sqrt{\frac{F}{k}} \frac{m}{\sqrt{kF}} \operatorname{lnch} \frac{t}{m} \sqrt{kF} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $x = 0$ ($\operatorname{ch} 0 = 1$, $\ln 1 = 0$), rezultă $C' = 0$,

$$x = \frac{m}{k} \operatorname{lnch} \frac{t}{m} \sqrt{kF}. \quad (8)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = \sqrt{\frac{F}{k}} \int_0^t \operatorname{th} \frac{t}{m} \sqrt{kF} dt = \sqrt{\frac{F}{k}} \frac{m}{\sqrt{kF}} \operatorname{lnch} \frac{t}{m} \sqrt{kF} \Big|_0^x = \frac{m}{k} \operatorname{lnch} \frac{t}{m} \sqrt{kF}.$$

Putem găsi $x = x(v)$ eliminând timpul t din (6) și (8). Dar vom proceda altfel. Înmulțim ecuația (4) cu dx :

$$(F - kv^2) dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dv,$$

separăm variabilele și integrăm :

$$dx = \frac{m v dv}{F - kv^2} = - \frac{m}{2k} \frac{d(-kv^2)}{F - kv^2},$$

$$\int dx = x = - \frac{m}{2k} \int \frac{d(-kv^2)}{F - kv^2} = - \frac{m}{2k} \ln(F - kv^2) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$:

$$0 = - \frac{m}{2k} \ln F + C, \quad C = \frac{m}{2k} \ln F,$$

$$x = \frac{m}{2k} \ln \frac{F}{F - kv^2}. \quad (9)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = - \frac{m}{2k} \int_0^v \frac{d(-kv^2)}{F - kv^2} = - \frac{m}{2k} \ln \frac{F - kv^2}{F}.$$

$$** \text{ 1.2.141. } F - kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = - \frac{m}{k} \frac{dv}{v^3}, \quad \int dt = t = - \frac{m}{k} \int \frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k} \frac{1}{v^2} + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$0 = \frac{m}{2k} \frac{1}{v_0^2} + C, \quad C = - \frac{m}{2k v_0^2},$$

$$t = \frac{m}{2k} (1/v^2 - 1/v_0^2), \quad v = 1 : \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}. \quad (2)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă):

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k} \frac{1}{v^2} \Big|_{v_0}^v = \frac{m}{2k} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right).$$

Continuăm integrarea:

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \quad \int dx = x = \int \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \\ &= \frac{m}{k} \int \frac{d(2kt/m)}{2\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k} \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} + C', \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = v_0$ și $x = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{kv_0} + C', \quad C' = -\frac{m}{kv_0}, \\ x &= \frac{m}{k} \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} - m/(kv_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Se putea integra și definit:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k} \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} \Big|_0^t.$$

**** 1.2.142.** Din semnificația unghiului de frecare rezultă imediat că $\varphi = 30^\circ$ este chiar unghiul de frecare ($\mu = \operatorname{tg} \varphi$). La coborîrea liberă în jos:

$$mg \sin \alpha - mg \cos \alpha - kv^2 = 0, \quad (a = 0),$$

de unde

$$k = \frac{1}{c^2} mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \frac{1}{c^2} mg \sin(\alpha - \varphi) : \cos \varphi. \quad (1)$$

Pentru urcarea liberă în sus de-a lungul planului înclinat:

$$-mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Am putea separa variabilele și integra, și am găsi $v = v(t)$, dar ne interesează *distanța parcursă pe plan pînă la oprire* (și nu timpul).

Pentru aceasta înmulțim ecuația (2) cu dx :

$$-dx(mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv^2) = m \frac{dv}{dt} dx = mv dv,$$

separăm acum variabilele și integrăm:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-m dv}{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv^2}, \quad s = \int_0^s dx = \int_{v_0}^0 \frac{-m dv}{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv^2} = \\ &= -\frac{m}{2k} \int_{v_0}^0 \frac{d(v^2)}{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv^2} = -\frac{m}{2k} \ln(mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv^2) \Big|_{v_0}^0 = \\ &= -\frac{m}{2k} \ln \frac{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha}{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv_0^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

La coborîre :

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

Înmulțim ambii membri cu dx , apoi separăm variabilele și integrăm :

$$dx(mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2) = m \frac{dv}{dt} dx = m v dv,$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{m v dv}{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2}, \quad s = \int_0^s dx = \\ &= -\frac{m}{2k} \int_0^{v'} \frac{d(v^2)}{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2} = \\ &= -\frac{m}{2k} \ln \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv'^2}{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

Egalăm distanțele (3) și (5) :

$$\begin{aligned} s &= -\frac{m}{2k} \ln \frac{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha}{mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + kv_0^2} = \\ &= -\frac{m}{2k} \ln \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv'^2}{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}, \end{aligned}$$

înlocuim pe k din (1) și înlocuim pe $\mu = \tan \varphi$; obținem :

$$1 - v'^2/c^2 = \sin(\alpha + \varphi) : [\sin(\alpha + \mu) + \sin(\alpha - \varphi)v_0^2/c^2],$$

de unde

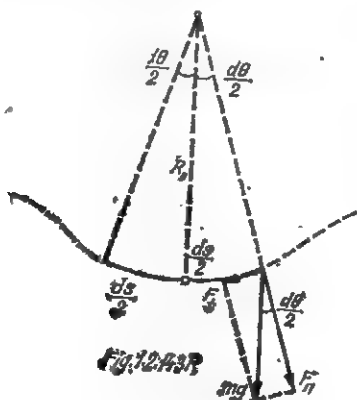
$$v' = v_0 : \sqrt{v_0^2/c^2 + \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\alpha - \varphi)} = 1,0 \text{ m/s}. \quad (6)$$

(*) 1.2.143. Luăm un element de curbă ds în jurul minimumului. Forța de revenire a particulei este componenta tangențială a greutateii :

$$F_t = mg \sin \frac{d\theta}{2} = mg \frac{d\theta}{2}. \quad (1)$$

Dar $ds = R_0 d\theta$, deci

$$F_t = \frac{mg ds}{R_0} = k \frac{ds}{2}, \quad (=kx), \quad (2)$$



forța este de tip elastic cu constanta $k = mg/R_0$, prin urmare perioada oscilațiilor :

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{R_0/g}. \quad (3)$$

Desigur, putem judeca și cu variații foarte mici (în loc de diferențiale), care descresc către zero : $\Delta\theta$, $\Delta s = R_0\Delta\theta$ și să folosim aproximația bine cunoscută : ~

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \rightarrow \frac{\Delta\theta}{2} \text{ cînd } \Delta\theta \rightarrow 0. \quad (4)$$

$$** \text{ 1.2.144. } F_r = -kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = -\frac{m dv}{kv^2}, \quad \int dt = -\frac{m dv}{kv^2}, \quad t = \frac{m}{kv} + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = v_0$; $0 = m/(kv_0) + C$, $C = -m/(kv_0)$, deci

$$t = \frac{m}{k} (1/v - 1/v_0). \quad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v -\frac{m dv}{kv^2}, \quad t = \frac{m}{k} \frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Timpul, cerut este ($v = v_0/n$) :

$$\tau = \frac{m}{kv_0} (n - 1). \quad (3)$$

$$** \text{ 1.2.145. } F_r = -kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = -\frac{m dv}{kv^2}, \quad \int dt = -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{v^2}, \quad t = \frac{m}{kv} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = v_0$; $0 = m/(kv_0) + C$, $C = -m/(kv_0)$,

$$t = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right), \quad (2)$$

$$k = \frac{m}{t} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{m}{v_0 \tau} (e - 1). \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = \frac{m}{k} \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{k} \frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Mai departe aflăm legea mișcării : $dx = v dt$, dar din (2) :

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t/m}, \quad (4)$$

deci

$$x = \int v dt = \int \frac{v_0}{1 + kv_0 t/m} dt = \frac{m}{k} \int \frac{(kv_0/m) dt}{1 + kv_0 t/m} = \frac{m}{k} \ln(1 + kv_0 t/m) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = \frac{m}{k} \ln 1 + C, \quad C = 0,$$

$$x = \frac{m}{k} \ln(1 + kv_0 t/m). \quad (5)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{v_0 dt}{1 + kv_0 t/m} = \frac{m}{k} \ln(1 + kv_0 t/m).$$

Distanța cerută se obține înlocuind în (5) pe k din (3) :

$$x_m = \frac{m}{k} \ln(1 + kv_0 \tau/m) = v_0 \tau : (e - 1) = 100 \text{ m}. \quad (6)$$

Putem proceda și altfel : Înmulțim ambii membri ai ecuației (1) cu dx

$$-kv^2 dx = m \frac{dv}{dt} dx = mv dv, \quad \left(\frac{dx}{dt} = v \right),$$

separăm variabilele și integrăm :

$$dx = \frac{m dv}{-kv}, \quad \int dx = \int -\frac{m dv}{kv} = -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{v}, \quad x = -\frac{m}{k} \ln v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :
la $x = 0$ avem $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k} \ln v_0 + C, \quad C = \frac{m}{k} \ln v_0,$$

$$x = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v} \quad (7)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}, \quad x = -\frac{m}{k} \ln \frac{v}{v_0}.$$

Punind în (7) condiția $v = v_0/e$ și înlocuind pe k din (3), găsim distanța cerută (6).

$$** \text{ 1.2.146. a) } -kv = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

separăm variabilele și integrăm :

$$dt = -\frac{m}{k} \frac{dv}{v}, \quad \int dt = -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{v}, \quad t = -\frac{m}{k} \ln v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :
la $t = 0$, avem $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k} \ln v_0 + C, \quad C = \frac{m}{k} \ln v_0,$$

$$t = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v}. \quad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă) :

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{m}{k} \ln \frac{v}{v_0}.$$

Punind condiția $v = v_0/e$ în (2) obținem :

$$\tau = \frac{m}{k} \ln e, \quad k = \frac{m}{\tau} = 10 \text{ kg/s.} \quad (3)$$

b) Din (2) avem legea vitezei :

$$v = v_0 e^{-kt/m}. \quad (4)$$

$$dx = v dt, \quad x = \int v dt = \int v_0 e^{-kt/m} dt = -\frac{m}{k} v_0 e^{-kt/m} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k} v_0 + C, \quad C = \frac{m}{k} v_0, \\ x = \frac{m}{k} v_0 (1 - e^{-kt/m}). \quad (5)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t v_0 e^{-kt/m} dt = -\frac{m}{k} v_0 e^{-kt/m} \Big|_0^t = -\frac{m}{k} v_0 (e^{-kt/m} - 1).$$

Înlocuind în (5) pe k din (3), găsim

$$x = v_0 \tau (1 - e^{-1}) = v_0 \tau \frac{e - 1}{e} = 6,3 \text{ m.}$$

Se poate proceda și altfel, găsim $x = x(v)$. Pentru aceasta înmulțim ecuația (1) cu dx :

$$-kv dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dv,$$

separăm variabilele și integrăm :

$$dx = -\frac{m dv}{k}, \quad x = \int dx = -\frac{m}{k} \int dv = -\frac{m}{k} v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k} v_0 + C, \quad C = \frac{m}{k} v_0, \\ x = \frac{m}{k} (v_0 - v). \quad (6)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v dv = -\frac{m}{k} (v - v_0).$$

Punind în (6) condiția $v = v_0/c$ și înlocuind pe k din (3), găsim distanța cerută :

$$x = v_0 \tau (1 - 1/c) = 6,3 \text{ m.}$$

c) Punind în (6) condiția de oprire $v = 0$ și înlocuind pe k din (3), găsim

$$x_m = v_0 \tau = 10 \text{ m.}$$

Dar timpul în care se parcurge această distanță este (teoretic) *infinit*, aceasta rezultă din (2) sau (4) punind $v = 0$.

$$\text{** 1.2.147. } F = mg - kv = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele :

$$dt = \frac{m dv}{mg - kv}.$$

Observăm că într-un membru trebuie să fie dt împreună cu *factori* care depind de t (nu avem aici), iar în celălalt membru dv cu *factori* care depind de v . Factorii constanți pot fi lăsați în oricare membru. Integrăm :

$$\int dt = t = \int \frac{m dv}{mg - kv} = -\frac{m}{k} \int \frac{-k dv}{mg - kv} = -\frac{m}{k} \ln(mg - kv) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k} \ln mg + C, \quad C = \frac{m}{k} \ln mg,$$

$$t = \frac{m}{k} \ln \frac{mg}{mg - kv}. \quad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = t = \int_0^v \frac{m dv}{mg - kv} = -\frac{m}{k} \ln(mg - kv) \Big|_0^v = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg - kv}{mg}.$$

Pe de altă parte, viteza limită se atinge când forțele își fac echilibru : forța de frecare crește cu viteza pînă cînd egalează forța de greutate, atunci în (1) accelerația se anulează și viteza rămîne constantă :

$$mg - kv = 0, \quad k = mg/c. \quad (3)$$

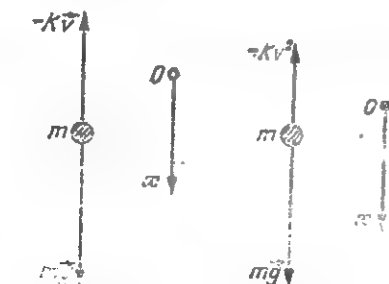


Fig. 1.2.147 R

Fig. 1.2.149 R

$$t = \frac{c}{g} \ln(1 - v/c). \quad (4)$$

Punînd condiția $v = fc$:

$$t = \frac{c}{g} \ln(1 - f) = 2,3 \frac{c}{g} \lg(1 - f) = 23 \text{ ms.}$$

$$** \text{ 1.2.148. } F = mg - kv = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

Viteza limită c se obține cînd forțele își fac echilibru (forța de rezistență echilibrează greutatea), atunci în (1) accelerația se anulează:

$$mg - kc = 0, \quad k = mg/c. \quad (2)$$

Separăm variabilele în (1) și integrăm:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{m dv}{mg - kv} = \frac{dv}{g(1 - v/c)}, \quad \int dt = t = \int \frac{dv}{g(1 - v/c)} = \\ &= -\frac{c}{g} \ln(1 - v/c) + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{c}{g} \ln 1 + C, \quad C = 0,$$

$$t = -\frac{c}{g} \ln(1 - v/c), \quad 1 - v/c = e^{-gt/c}, \quad v = c(1 - e^{-gt/c}). \quad (3)$$

Se putea integra și definit:

$$\int_0^t dt = t = \int_0^v \frac{dv}{g(1 - v/c)} = -\frac{c}{g} \ln(1 - v/c) \Big|_0^v = -\frac{c}{g} \ln(1 - v/c).$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \quad x = \int dx = \int v dt = \int c(1 - e^{-gt/c}) dt = \\ &= \int c dt - \int c e^{-gt/c} dt = ct + \frac{1}{g} c^2 e^{-gt/c} + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$: $0 = c^2/g + C, \quad C = -c^2/g,$

$$x = ct + \frac{1}{g} c^2(e^{-gt/c} - 1). \quad (4)$$

Se putea integra și definit:

$$\begin{aligned} \int_0^x dx &= x = \int_0^t c(1 - e^{-gt/c}) dt = \\ &= ct \Big|_0^t + \frac{1}{g} c^2 e^{-gt/c} \Big|_0^t = ct + \frac{1}{g} c^2(e^{-gt/c} - 1). \end{aligned}$$

$$** \text{ 1.2.149. a) } F = mg - kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{m dv}{mg - kv^2}, \quad \int dt = t = \int \frac{m dv}{mg - kv^2} = \frac{m}{k} \int \frac{dv}{mg/k - v^2}.$$

Amintim integrala :

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a}, \quad (2)$$

unde „argument tangenta hiperbolică” $\operatorname{argth} x$ este funcția inversă „tangentei hiperbolice” :

$$\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x}) : (e^x + e^{-x}) = \operatorname{sh} x : \operatorname{ch} x.$$

Integrala noastră devine atunci

$$t = \frac{m}{kg} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{mg}} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$; rezultă $C = 0$ (căci $\operatorname{argth} 0 = 0$).

$$t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} \frac{v}{\sqrt{mg/k}}, \quad v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{kg}{m}} t. \quad (3)$$

Se putea integra și definit :

$$\int_0^t dt = t = \frac{m}{k} \int_0^v \frac{dv}{mg/k - v^2} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Pe de altă parte viteza limită se obține când forțele se echilibrează (forța de rezistență echilibrează greutatea) și accelerația devine zero :

$$mg - kv^2 = 0, \quad k = mg/c^2. \quad (4)$$

Atunci legea vitezei devine :

$$v = c \operatorname{th} \frac{g}{c} t. \quad (5)$$

$$b) \quad dx = v dt, \quad x = \int dx = \int v dt = \int c \operatorname{th} \frac{g}{c} t \cdot dt.$$

Amintim integrala :

$$\int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{lnch} ax + C, \quad (6)$$

unde „cosinus hiperbolic” este funcția

$$\operatorname{ch} ax = \frac{1}{2} (e^{ax} + e^{-ax}).$$

În cazul nostru obținem :

$$x = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch}(gt/c) + C,$$

unde constanta de integrare se obține din condiția inițială : la $t = 0$, $x = 0$ ($\operatorname{ch} 0 = 1$, $\ln 1 = 0$), rezultă $C = 0$,

$$x = \frac{1}{g} c^2 \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}. \quad (7)$$

c) Dependența $x = x(v)$ s-ar putea obține eliminând timpul din (5) și (7), dar vom proceda altfel, mai direct. Înmulțim ecuația (1) cu dx :

$$(mg - kv^2)dx = m \frac{dv}{dt} dx = mv \, dv.$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{mvdv}{mg - kv^2}, \quad \int dx = x = \int \frac{mvdv}{mg - kv^2} = \\ &= -\frac{m}{2k} \int \frac{d(-kv^2)}{mg - kv^2} = -\frac{m}{2k} \ln(mg - kv^2) + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{2k} \ln mg + C, \quad C = \frac{m}{2k} \ln mg,$$

$$x = \frac{m}{2k} \ln \frac{mg}{mg - kv^2}. \quad (8)$$

Se putea integra și definit :

$$\int_0^x dx = \int_0^v \frac{mvdv}{mg - kv^2} = -\frac{m}{2k} \ln \frac{mg - kv^2}{mg}.$$

Introducând în (8) pe k din (4), obținem :

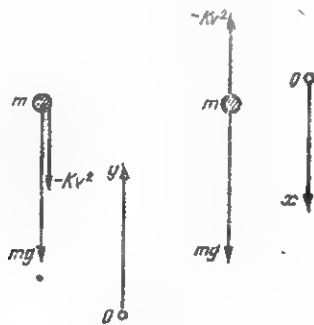
$$x = \frac{1}{2g} c^2 \ln \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (9)$$

**** 1.2.150.** Viteza limită de cădere liberă se atinge când forțele se echilibrează și accelerația devine zero :

$$mg - kv^2 = 0, \quad k = mg/c^2. \quad (1)$$

a) La urcare :

$$-mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$



a Fig.1.2.150R b

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = -\frac{m dv}{mg + kv^2} = -\frac{m}{k} \frac{dv}{mg/k + v^2},$$

$$\int dt = t = -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{mg/k + v^2} = -\frac{1}{g} c^2 \int \frac{dv}{c^2 + v^2} = -\frac{c}{g} \operatorname{arctg} \frac{v}{c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = v_0$:

$$0 = -\frac{c}{g} \operatorname{arctg}(v_0/c) + C, \quad C = \frac{c}{g} \operatorname{arctg}(v_0/c),$$

$$t = \frac{c}{g} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_0}{c} - \operatorname{arctg} \frac{v}{c} \right). \quad (3)$$

Am putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{g} c^2 \int_{v_0}^v \frac{dv}{c^2 + v^2} = -\frac{c}{g} \operatorname{arctg} \frac{v}{c} \Big|_{v_0}^v = \frac{c}{g} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_0}{c} - \operatorname{arctg} \frac{v}{c} \right).$$

Punind în (3) $v = 0$ (condiția de oprire la înălțimea maximă), obținem timpul de urcare:

$$t_m = \frac{c}{g} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}. \quad (4)$$

Mai departe, am putea în principiu rezolva (3) $v = v(t)$ și continua integrarea: $dy = v dt$, pentru a obține $y = y(t)$, dar în cazul nostru este mai simplu de aflat $y = y(v)$. Pentru aceasta înmulțim ecuația (2) cu dy :

$$-(mg + kv^2) dy = m \frac{dv}{dt} dy = m v dv, \quad \left(\frac{dy}{dt} = v \right).$$

(Aceasta este de fapt forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice: $dL = F dy = dE_c = m v dv$). Separăm variabilele și integrăm:

$$dy = \frac{-m v dv}{mg + kv^2} = -\frac{m}{2k} \frac{d(v^2)}{mg/k + v^2} = -\frac{1}{2g} c^2 \frac{d(v^2)}{c^2 + v^2},$$

$$\int dy = y = -\frac{1}{2g} c^2 \int \frac{d(v^2)}{c^2 + v^2} = -\frac{1}{2g} c^2 \ln(c^2 + v^2) + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$, $v = v_0$, $y = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2g} c^2 \ln(c^2 + v_0^2) + C', \quad C' = \frac{1}{2g} c^2 \ln(c^2 + v_0^2),$$

$$y = \frac{1}{2g} c^2 \ln \frac{c^2 + v_0^2}{c^2 + v^2}. \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^y dy = y = -\frac{1}{2g} c^2 \int_{v_0}^v \frac{d(v^2)}{c^2 + v^2} = -\frac{1}{2g} c^2 \ln \frac{c^2 + v^2}{c^2 + v_0^2}.$$

Punind în (5) $v = 0$ (condiția de oprire la înălțimea maximă), găsim înălțimea maximă la care urcă corpul:

$$h_m = \frac{1}{2g} c^2 \ln(1 + v_0^2/c^2). \quad (6)$$

b) La coborîre:

$$mg - kv^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (7)$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{m dv}{mg - kv^2} = \frac{m}{k} \frac{dv}{mg/k - v^2} = \frac{1}{g} c^2 \frac{dv}{c^2 - v^2}.$$

Amintim integrala :

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a}. \quad (8)$$

unde „argument tangenta hiperbolică”, $\operatorname{argth} x/a$, este funcția inversă „tangentei hiperbolice” :

$$\operatorname{th} \frac{x}{a} = (e^{x/a} - e^{-x/a}) : (e^{x/a} + e^{-x/a}) = \operatorname{sh} \frac{x}{a} : \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Atunci integrala noastră devine :

$$\int dt = t = \frac{1}{g} c^2 \int \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = 0$, atunci rezultă $C = 0$, ($\operatorname{argth} 0 = 0$) :

$$t = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c}, \quad v = c \operatorname{th} \frac{gt}{c}. \quad (9)$$

Se putea integra și definit :

$$\int_0^t dt = t = \frac{1}{g} c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c} \Big|_0^v = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c}.$$

Continuăm integrarea pentru a găsi $x = x(t)$:

$$dx = v dt = c \cdot \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt, \quad \int dx = x = c \int \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt.$$

Amintim integrala :

$$\int \operatorname{th} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{lnch} ax, \quad (10)$$

atunci integrala noastră devine :

$$x = c \int \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială : pentru $t = 0$, $x = 0$, ($\operatorname{ch} 0 = 1$, $\ln 1 = 0$), rezultă $C' = 0$:

$$x = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c}. \quad (11)$$

Se putea integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = c \int_0^t \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c} \Big|_0^t = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c}.$$

Timpul de coborire se poate obține din (11) punind condiția $x = h_m$ (6) :

$$h_m = \frac{1}{2g} c^2 \ln(1 + v_0^2/c^2) = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt'}{c},$$

$$\sqrt{1 + v_0^2/c^2} = \operatorname{ch} \frac{gt'}{c}, \quad t' = \frac{c}{g} \operatorname{argch} \sqrt{1 + v_0^2/c^2}. \quad (12)$$

Amintim formula :

$$\operatorname{argch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$$

astfel încît (12) se mai poate scrie astfel :

$$t' = \frac{c}{g} \operatorname{argch} \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} - \frac{c}{g} \ln \left(\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} - \frac{v_0}{c} \right). \quad (13)$$

Viteza cu care corpul ajunge jos s-ar putea găsi în principiu introducînd pe t' (13) în (9). Dar preferăm să găsim $x = x(v)$ astfel : înmulțim ecuația (7) cu dx :

$$(mg - kv^2)dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dr,$$

(aceasta este forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice : $dL = F dx = dE = m v dr$). Separăm variabilele și integrăm :

$$dx = \frac{m v dr}{mg - kv^2} = - \frac{m}{2k} \frac{d(-r^2)}{mg/k - v^2} = - \frac{1}{2g} \frac{c^2 d(-v^2)}{c^2 - v^2},$$

$$\int dx = x = - \frac{1}{2g} c^2 \int \frac{d(-v^2)}{c^2 - v^2} = - \frac{1}{2g} c^2 \ln(c^2 - v^2) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială :

la $t = 0$, avem $x = 0$, $v = 0$, deci $0 = - \frac{1}{2g} c^2 \ln c^2 + C$, $C = \frac{c^2}{2g} \ln c^2$,

$$x = \frac{c^2}{2g} \ln \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad v^2 = c^2(1 - e^{-2gx/c^2}). \quad (14)$$

Se putea integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = - \frac{c^2}{2g} \int_0^v \frac{d(-v^2)}{c^2 - v^2} = - \frac{c^2}{2g} \ln \frac{c^2 - v^2}{c^2}.$$

Dacă punem în (14) $x = h_m$ (6) obținem v' :

$$v'^2 = c^2(1 - e^{-\ln(1 + \frac{v_0^2}{c^2})}) = c^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} \right) = \frac{v_0^2}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}},$$

$$v' = v_0 : \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} = 1 : \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}}. \quad (15)$$

**** 1.2.151.** a) $F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) - kv = ma = m \frac{dr}{dt}$. (1)

Viteza limită, maximă posibilă, se obține cînd forțele își fac echilibru (atunci în membrul drept $a = \frac{dr}{dt} = 0$ și $r = c$) :

$$c = \frac{1}{k} [F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)]. \quad (2)$$

b) Folosind (2) putem scrie (1) astfel :

$$kc - kv = m \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = \frac{m}{k} \frac{dr}{c - v}, \quad \int dt = t = \frac{m}{k} \int \frac{dr}{c - v} = - \frac{m}{k} [\ln(c - v) + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $r = 0$: $0 = \ln c + C$, $C = - \ln c$,

$$t = - \frac{m}{k} \ln \frac{c - v}{c} = \frac{m}{k} \ln \frac{c}{c - v}, \quad v = c(1 - e^{-kt/m}). \quad (4)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = t = \frac{m}{k} \int_0^v \frac{dv}{c-v} = -\frac{m}{k} \ln \frac{c-v}{c}.$$

Se vede din (4) că viteza limită c se obține teoretic pentru $t \rightarrow \infty$. Continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \quad \int dx - x = \int c(1 - e^{-kt/m}) dt = ct + \frac{cm}{k} e^{-kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare C' se obține din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0, x = 0$: $0 = \frac{mc}{k} + C', \quad C' = -\frac{mc}{k}$,

$$x = ct + c \frac{m}{k} (e^{-kt/m} - 1). \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t c(1 - e^{-kt/m}) dt = ct + c \frac{m}{k} e^{-kt/m} \Big|_0^t.$$

Dacă introducem $t(4)$ în $x(5)$ găsim:

$$x = \frac{mc}{k} \left(\ln \frac{c}{c-v} - \frac{v}{c} \right). \quad (6)$$

Această ecuație se poate obține printr-o integrare directă, înmulțind ecuația (3) cu $dx = v dt$:

$$k(c-v)dx = m \frac{dv}{dt} v dt = mv dv,$$

(aceasta este de fapt forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice: $dL = Fdx = dE_c = mv dv$),

$$dx = \frac{mv dv}{k(c-v)} = \frac{m}{k} \frac{v-c+c}{c-v} dv,$$

$$\begin{aligned} \int dx = x &= \frac{m}{k} \int \frac{v-c+c}{c-v} dv = \frac{m}{k} \left[\int -dv - c \int \frac{d(-v)}{c-v} \right] = \\ &= \frac{m}{k} [-v - c \ln(c-v) + C''], \end{aligned}$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$: $0 = -c \ln c + C'', \quad C'' = c \ln c$.

$$x = \frac{m}{k} \left[-v + c \ln \frac{c}{c-v} \right]. \quad (6)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \frac{m}{k} \int_0^v \left(-1 + \frac{c}{c-v} \right) dv = \frac{m}{k} \left(-v - c \ln \frac{c-v}{c} \right).$$

**** 1.2.152.** Fie $x < l$ distanța cu care intră pe asfalt frontul saniei. Atunci forța de frecare:

$$F_f = \mu mg \frac{x}{l} = kx, \quad k = \frac{\mu mg}{l}, \quad (1)$$

iar ecuația principelui II al mecanicii dă :

$$-mg \frac{x}{l} = -kx = ma = m \frac{dv}{dt} = m\dot{x}, \quad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \text{ sau } \ddot{x} + \frac{\mu g}{l} x = 0 \text{ sau } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\mu g/l} = \sqrt{k/m}. \quad (3)$$

Am obținut binecunoscuta ecuație diferențială a oscilatorului armonic a cărei soluție este :

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (4)$$

unde constantele de integrare A — amplitudinea și α — faza inițială se determină din condițiile inițiale.

O cale mai fizică de a găsi soluția ecuației (3) este următoarea. Înmulțim ambii membri ai ecuației cu $2 \frac{dx}{dt} = 2\dot{x}$:

$$2\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} = 0 \text{ sau } (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)' = 0$$

$$\text{sau } \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = 0 \text{ sau } \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = 0,$$

ceea ce înseamnă (prin integrare) că

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \text{const} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \text{const}, \quad (5)$$

$$(k = m\omega^2, E = E_c + E_p),$$

deci această *primă integrală* reprezintă legea conservării energiei; constanta de integrare din (5) este chiar energia care se conservă. Scoatem viteza din (3) și continuăm integrarea :

$$v = \sqrt{2E/m - kx^2/m} = \frac{dx}{dt}, \text{ de unde } dt = \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}},$$

$$\int_{t_0}^t dt = t - t_0 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}} = \omega \arcsin \frac{\omega x}{\sqrt{2E/m}}.$$

$$x = \frac{1}{\omega} \sqrt{2E/m} \sin \omega(t - t_0) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \left(E = \frac{1}{2} k A^2\right). \quad (6)$$

Revenim la problema noastră. Constanta α din (4) se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$, deci $\alpha = 0$; $x = A \sin \omega t$.

Viteza este

$$v = \dot{x} = \omega A \cos \omega t. \quad (7)$$

Constanta A se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$v_0 = \omega A, \quad A = v_0/\omega, \text{ atunci}$$

$$r = v_0 \cos \omega t, \quad x = \frac{1}{\omega} v_0 \sin \omega t, \quad x \leq l. \quad (8)$$

Condiția de oprire și timpul pînă la oprire :

$$v = 0 = v_0 \cos \omega t, \quad \omega t = \pi/2, \quad \tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}, \quad (\text{un sfert de „perioadă”}), \quad (9)$$

dacă distanța până la oprire $x_m \leq l$:

$$x_m = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega \tau = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \leq l, \text{ adică } l \geq \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (10)$$

Dacă însă $v_0/\omega > l$, adică $l < v_0^2/(\mu g)$, atunci calculăm timpul t' și viteza v' când sania intră complet pe asfalt: $x = l$:

$$l = \frac{1}{\omega} v_0 \sin \omega t', \quad t' = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega l}{v_0} = \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arcsin \frac{\sqrt{\mu g l}}{v_0}, \quad (11)$$

$$v' = v_0 \cos \omega t' = v_0 \sqrt{1 - \omega^2 t'^2 / v_0^2} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 l^2} = \sqrt{v_0^2 - \mu g l}. \quad (12)$$

De aici încolo sania lunecă uniform încetinit cu accelerația $a = \mu g$, deci timpul suplimentar și distanța suplimentară parcursă:

$$t_m = -\frac{v'}{a} = \frac{v'}{\mu g} = \frac{1}{\mu g} \sqrt{v_0^2 - \mu g l}, \quad x_m = -\frac{v'^2}{2a} = -\frac{v'^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g} (v_0^2 - \mu g l). \quad (13)$$

Timpul total și distanța totală până la oprire vor fi atunci în acest caz:

$$T = \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arcsin \frac{\sqrt{\mu g l}}{v_0} + \frac{1}{\mu g} \sqrt{v_0^2 - \mu g l},$$

$$L = l + \frac{1}{2\mu g} (v_0^2 - \mu g l), \text{ dacă } l < \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (14)$$

**** 1.2.153.** $-kv^3 = ma = m \frac{dv}{dt}$, (1)

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = -\frac{m dv}{kv^3}, \quad \int dt = t = -\frac{m}{k} \int \frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2kv^2} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = v_0$; rezultă $C = -m/(2kv_0^2)$,

$$t = \frac{m}{2k} (1/v^2 - 1/v_0^2), \quad v^2 = 1 : (1/v_0^2 + 2kt/m). \quad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k} \left. \frac{1}{v^2} \right|_{v_0}^v = \frac{m}{2k} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right).$$

Continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \quad \int dx = x = \int v dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k} \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$: $0 = m/(k v_0) + C'$, $C' = -m/(k v_0)$,

$$x = \frac{m}{k} (\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} - 1/v_0). \quad (3)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k} \left. \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} \right|_0^t.$$

Introducem $t(2)$ în $x(3)$:

$$x = \frac{m}{k} (1/v - 1/v_0). \quad (4)$$

Putem obține această ecuație prin integrare directă înmulțind ambii membri ai ecuației fundamentale (1) cu $dx = v dt$:

$$-kr^3 dx = m \frac{dv}{dt} v dt = m v dv.$$

Separăm variabilele și integram:

$$dx = -\frac{m dv}{kr^2}, \quad \int dx = x = -\frac{m}{k} \int -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) + C'',$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiția inițială:

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } v = v_0 \text{ și } x = 0: 0 = \frac{m}{k v_0} + C'', \quad C'' = -\frac{m}{k v_0},$$

$$x = \frac{m}{k} (1/v - 1/v_0).$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \frac{m}{k} \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{k} \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right] = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Punem în (4) condiția la margine: $x = h, v = v'$:

$$h = \frac{m}{k} (1/v' - 1/v_0), \quad \frac{m}{k} = h : (1/v' - 1/v_0), \quad (5)$$

pe care o introducem în timpul $t(2)$:

$$t = \frac{1}{2} h (1/v'^2 - 1/v_0^2) : (1/v' - 1/v_0). \quad (6)$$

Timpul de traversare cerut se obține de aici punând $v = v'$:

$$\tau = \frac{1}{2} h (1/v'^2 - 1/v_0^2) : (1/v' - 1/v_0) = \frac{1}{2} h (1/v' + 1/v_0) = 1,67 \text{ ms.} \quad (7)$$

**** 1.2.154.** a) Luăm un element de fir de lungime ds , care subîntinde un unghi la centru infinit mic $d\theta$. Cele două tensiuni de la capetele sale diferă infinit de puțin între ele (considerăm $T_0 > T'$, $dT < 0$), de aceea rezultanta lor este la limită (Vd. figura):

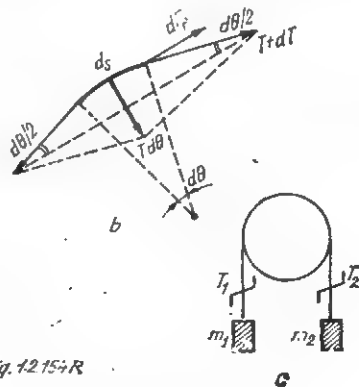
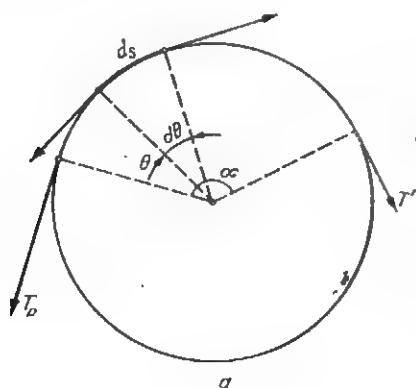


Fig. 12.154 R

c

$$2T \sin \frac{d\theta}{2} = 2T \frac{d\theta}{2} = T d\theta, \quad (1)$$

această rezultantă reprezintă forța de apăsare normală. În cazul lunecării forța de frecare la lunecare pentru elementul ds considerat va fi:

$$dF_f = \mu dN = \mu T d\theta. \quad (2)$$

La limita lunecării (cînd firul este gata să lunece sau chiar a pornit să lunece înfinit de puțin) accelerația este încă zero și avem încă satisfăcută condiția de echilibru pe direcția tangențială:

$$dT = -dF_f = -\mu T d\theta.$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$\frac{dT}{T} = -\mu d\theta, \quad \int \frac{dT}{T} = -\mu \int d\theta, \quad \ln T = -\mu\theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine: pentru $\theta = 0$ avem $T = T_0 (\neq 0)$: $\ln T_0 = C$,

$$\ln \frac{T}{T_0} = -\mu\theta, \quad T = T_0 e^{-\mu\theta}, \quad (\theta < \alpha). \quad (3)$$

Se putea integra și definit (limitele se corespund):

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -\mu \int_0^\theta d\theta, \quad \ln \frac{T}{T_0} = -\mu\theta, \quad T = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

b) Punînd în (3) condiția $\theta = \alpha$, găsim raportul tensiunilor de la capete la limită în momentul lunecării:

$$T' = T_0 e^{-\mu\alpha}, \quad T_0/T' = e^{\mu\alpha}. \quad (4)$$

c) Condiția de lunecare este evident (4) în care tensiunile sînt greutatea respective:

$$m_1/m_2 \geq e^{(2n+1)\pi\mu}. \quad (5)$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \quad T_2 - m_2 g = m_2 a, \quad T_2 = T_1 e^{-(2n+1)\pi\mu}, \quad (6)$$

$$a = g[m_1/m_2 - e^{(2n+1)\pi\mu}]: [m_1/m_2 + e^{(2n+1)\pi\mu}], \quad (7)$$

$$T_1 = T_2 e^{(2n+1)\pi\mu}, \quad T_2 = 2m_1 g: [m_1/m_2 + e^{(2n+1)\pi\mu}], \quad (8)$$

$$T_1 - T_2 = 2m_2 g[e^{(2n+1)\pi\mu} - 1]: [m_1/m_2 + e^{(2n+1)\pi\mu}]. \quad (9)$$

** 1.2.155. Pentru un corp cu masa variabilă avem ecuația (I.V. Meșcurski 1897):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad \text{unde } \vec{F}_r = \vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt}, \quad (1)$$

unde \vec{F}_r este forța reactivă și \vec{v}_{rel} — viteza relativă (față de corp) de expulzare a masei.

În cazul nostru, $\vec{F} = 0$:

$$\vec{v}_{rel} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad d\vec{v} = \vec{v}_{rel} \frac{dm}{m},$$

$$\int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v} = \int_{m_0}^m \vec{v}_{rel} \frac{dm}{m} = \vec{v}_{rel} \ln \frac{m}{m_0} = -\vec{v}_{rel} \ln \frac{m_0}{m}. \quad (2)$$

Viteza rachetei este opusă vitezei de expulzare a gazelor. Cînd masa rachetei se reduce la jumătate, viteza atinsă de rachetă va fi:

$$\vec{v} = -\vec{v}_{rel} \ln 2 = -0,693 \vec{v}_{rel} = -0,7 \vec{v}_{rel}.$$

Abia cînd masa rachetei se reduce de 2 ori viteza devine $\vec{v} = -\vec{v}_{rel}$.

**** 1.2.156.** Pentru un corp cu *masa variabilă* avem ecuația (I.V. Meșcerski 1897):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad \vec{F}_r = \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} - \text{forța reactivă.} \quad (1)$$

În cazul nostru:

$$m\vec{g} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ sau } \vec{g} dt + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{m} = d\vec{v}. \quad (2)$$

Integrăm:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{g} dt + \int_{m_0}^m \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{m} = \vec{g} t + \vec{v}_{\text{rel}} \ln \frac{m}{m_0},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t + \vec{v}_{\text{rel}} \ln (m_0/m). \quad (3)$$

În cazul lansării rachetei pe verticală din repaus, avem:

$$v = |v_{\text{rel}}| \ln (m_0/m) - gt. \quad (4)$$

Condiția de desprindere de Pământ:

$$F_r \geq m_0 g, \quad \left| v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} \right| \geq m_0 g \text{ sau } D = \left| \frac{dm}{dt} \right| = - \frac{dm}{dt} \geq \frac{m_0 g}{|v_{\text{rel}}|},$$

unde D este debitul de ejectare a gazelor.

**** 1.2.157.** a) Ecuația mișcării unui corp cu *masa variabilă* este (I.V. Meșcerski 1897):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad \vec{F}_r = \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} - \text{forța reactivă.} \quad (1)$$

În cazul nostru $\vec{F} = 0$:

$$\vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2)$$

Proiectăm această ecuație pe direcția de mișcare a navei (pe direcția vitezei \vec{v} și pe direcția transversală, perpendiculară pe direcția de mișcare a navei (pe direcția normală pe viteza navei), în sensul spre centrul de curbura:

$$0 = ma_t = m \frac{dv}{dt}, \quad (3)$$

$$-v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = ma_n = m \frac{v^2}{R}. \quad (4)$$

Din prima ecuație rezultă $v = |\vec{v}| = \text{const} = v_0$, adică viteza navei rămâne constantă în *modul*. Pe de altă parte (vd. figura):

$$|d\vec{v}| = 2v \sin \frac{d\theta}{2} = v d\theta, \quad d\theta = \frac{|d\vec{v}|}{v}.$$

Luând modulul ecuației (2) avem

$$\left| \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} \right| = -v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \frac{|d\vec{v}|}{dt},$$

astfel încît ecuația (4) devine:

$$-v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = \frac{mv^2}{R} = m \frac{|d\vec{v}|}{dt},$$

$$\text{deci} \quad d\theta = \frac{|d\vec{v}|}{v} = - \frac{v_{\text{rel}}}{v} \frac{dm}{m} = - \frac{v_{\text{rel}}}{v_0} \frac{dm}{m}.$$

Integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^{\theta} d\theta = 0 = -\frac{v_{rel}}{v_0} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -\frac{v_{rel}}{v_0} \ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v_{rel}}{v_0} \ln \frac{m_0}{m}. \quad (5)$$

Se poate integra și nedefinit:

$$\int d\theta = \theta = -\frac{v_{rel}}{v_0} \int \frac{dm}{m} = -\frac{v_{rel}}{v_0} (\ln m + C),$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială: la $\theta = 0$ avem $m = m_0$: $0 = \ln m_0 + C$, $C = -\ln m_0$, deci

$$0 = \frac{1}{v_0} v_{rel} \ln (m_0/m). \quad (5)$$

Din ecuația (4) rezultă prin separarea variabilelor:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{v^2}{v_{rel} R} dt = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 dt,$$

care integrată dă:

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 \int_0^t dt, \quad \ln \frac{m}{m_0} = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 t,$$

$$m = m_0 \exp \left\{ -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 t \right\}. \quad (6)$$

Se poate integra și nedefinit:

$$\int \frac{dm}{m} = \ln m = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 \int dt = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $m = m_0$: $\ln m_0 = C$, deci

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{1}{R v_{rel}} v_0^2 t.$$

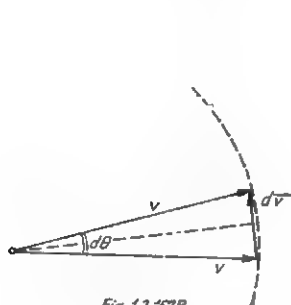


Fig. 12.157R

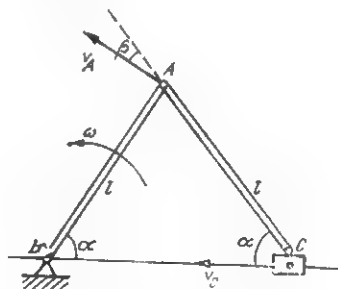


Fig. 12.158R

Mișcarea circulară

1.2.158. $v_c = 2v_A \sin \omega t$, $v_{cmax} = 2 \omega l = 10,0$ m/s, $a_{cmax} = 2\omega^2 l = 50$ m/s².

1.2.159. Perioada T din enunț este față de stelele „fixe”. Pământul are o mișcare de revoluție în jurul Soarelui de 365 zile, deaceia trecerea Soarelui la meridian „întîrzie” cu $T/365$:

$$T' = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} \left(1 + \frac{1}{365} \right) = 24 \text{ h}.$$

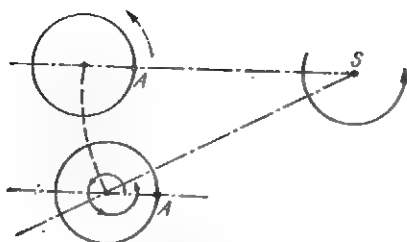


Fig. 1.2.159R

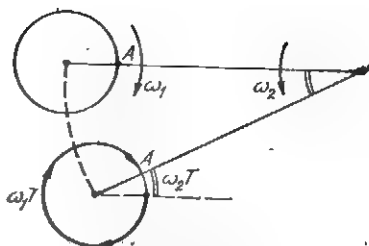


Fig. 1.2.160R

1.2.160. $T = T_1 T_2 : (T_1 + T_2) = 117$ zile terestre.

1.2.161. Un cerc orizontal. La solstițiul de vară (iarnă) cercul este la înălțimea unghiulară de $23^\circ 30'$ deasupra (dedesubtul) orizontului, iar la echinocțiu cercul este chiar la orizont.

1.2.162. La echinocțiu : un semicerc cu înălțimea unghiulară maximă de $23^\circ 30'$ deasupra sudului. La solstițiul de vară : un cerc care atinge orizontul la nord și are înălțimea unghiulară de 47° deasupra sudului.

$$1.2.163. \operatorname{tg} x = [m\omega^2 r \sin \varphi] : [mg - m\omega^2 r \cos \varphi] \approx \frac{1}{2g} \omega^2 R \sin 2\varphi, \quad x =$$

$$= R \sin \varphi \approx \frac{1}{2g} \omega^2 R^2 \sin 2\varphi, \quad x_{\max} \approx \frac{1}{2g} \omega^2 R^2 = 10 \text{ km}, \quad (\omega = 2\pi/T).$$

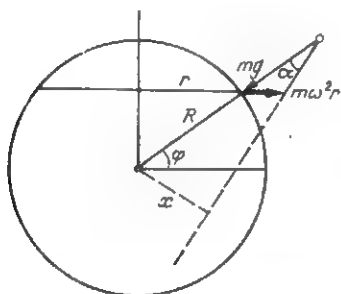


Fig. 1.2.163R

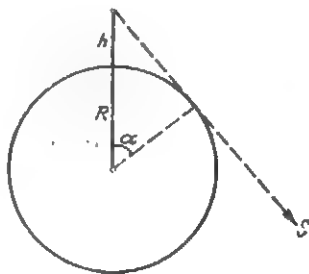


Fig. 1.2.164R

$$1.2.164. \quad t = T \frac{\alpha}{2\pi} \approx \frac{T}{2\pi} \sqrt{2h/R} = 12,8 \text{ min.}$$

1.2.165. a) $T_r = TT' : (T - T') = 30,33$ zile. b) În T_r , steaua se deplasează față de planetă cu $\theta = (\omega_0 - \omega)T_r = 2\pi \cdot 30,24 = 2\pi \cdot \frac{756}{25}$; $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{m}{N}$ = număr rațional, atunci $T'_r = NT_r = 758,25$ zile și eclipsa se produce la intervale T'_r în cele N puncte de pe ecuator.

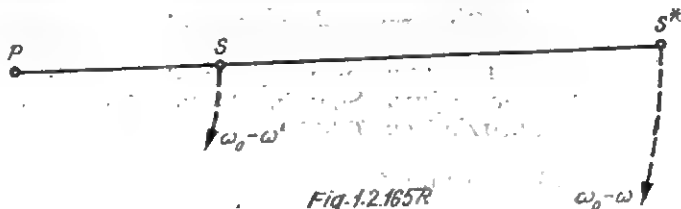


Fig. 1.2.165R

$\omega_0 - \omega$

$$1.2.166. [l, b] = n = 9, t = \frac{lx}{v} + \frac{\pi}{2v}(n+1)(l - nb/2) = 1,67 \text{ s.}$$

$$1.2.167. R = \frac{l}{2}(\omega_2 + \omega_1) : (\omega_2 - \omega_1) = 5,6 \text{ m, } \Omega = (\omega_2 - \omega_1)R/l = 0,25 \text{ rad/s.}$$

$$(*) \quad 1.2.168. h = l \sin \theta + \frac{1}{2g} v^2 \cos^2 \theta = f(\theta), \quad (1)$$

h este funcție de θ . Condiția de extremum este anularea derivatei $f'(\theta)$:

$$h'(\theta) = l \cos \theta - \frac{1}{g} v^2 \cos \theta \sin \theta = 0, \quad (2)$$

$$\text{de unde} \quad \cos \theta = 0, \quad \theta = \pm 90^\circ, \quad h = \pm l \quad (3)$$

și piatra pleacă orizontal, înălțimea fiind minimă (soluție banală). Cea-laltă soluție (dacă $v^2 > lg$):

$$\sin \theta = lg/v^2 = g/(4\pi^2 n^2 l) = 0,248, \quad \theta = 14^\circ 22', \quad (4)$$

dă înălțimea maximă:

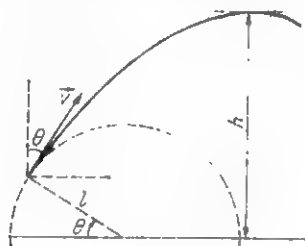


Fig. 12.168R

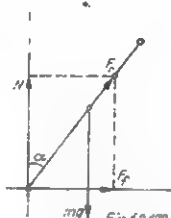


Fig. 12.172R

$$h_{\max} = l^2 g / (2v^2) + v^2 / (2g) = 2,12 \text{ m.} \quad (5)$$

Soluția (4) se poate obține și elementar, fără derivate. În adevăr:

$$h = l \sin \theta + \frac{1}{2g} v^2 (1 - \sin^2 \theta) = f(\sin \theta) \quad (1)$$

este o funcție pătratică în $\sin \theta$ (graficul este o parabolă) care are un *maxim* ($a = -v^2/(2g) < 0$) pentru

$$\sin \theta = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{l}{2[-v^2/(2g)]}. \quad (4)$$

Or, sinusul este monoton crescător cu unghiul θ în primul cadran.

Cazurile extreme („marginale”) $\theta = \pm 90^\circ$ se studiază direct.

1.2.169. Dreapta.

$$1.2.170. n > \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/(\mu R)} = 0,80 \text{ rot/s.}$$

$$1.2.171. \omega \geq \sqrt{2mgy/(MR)} = 2,0 \text{ rad/s.}$$

$$1.2.172. \alpha_{\max} = \varphi, \quad v_{\max} = \sqrt{2gR} = 7,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$1.2.173. a_{\max} = g(g \mp v^2/R) = 2,4 \text{ m/s}^2, \text{ resp. } 7,4 \text{ m/s}^2.$$

$$1.2.174. I_{\max} = F_{\max}(1 \mp v^2/(gR)) = 0, \text{ resp. } 30 \text{ kN.}$$

$$1.2.175. v_{\max}^2 = gR \left(\cos \frac{l}{2R} - \frac{1}{n} \sin \frac{l}{2R} \right), \quad v_{\max} = 10 \text{ m/s.}$$

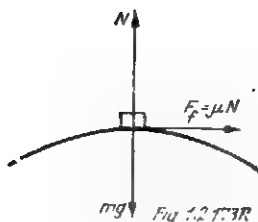


Fig. 1.2.176R

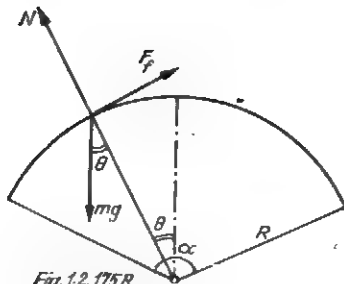


Fig. 1.2.175R

1.2.176. $\mu \geq (gR + v^2 \operatorname{tg} \alpha) : (gR \operatorname{tg} \alpha - v^2) = 0,38$.

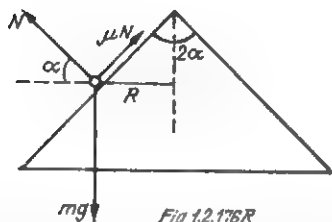


Fig. 1.2.176R

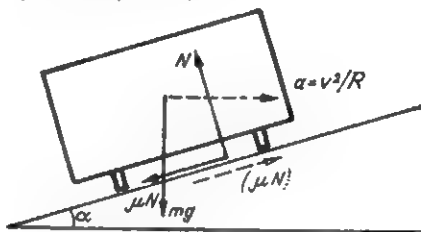


Fig. 1.2.177R

1.2.177. $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = v_{\max}^2 / (Rg) = 0,5774$, $\varphi = 10^\circ$; $gR \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = v_{\min}^2$, $v_{\min} = 11 \text{ m/s}$.

1.2.178. $v'_{\max} : v_{\max} = \operatorname{tg} \sqrt{(\varphi + \beta) : \operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{\frac{1}{\mu} (\mu + \operatorname{tg} \beta) : (1 - \mu \operatorname{tg} \beta)} = 1,15$.

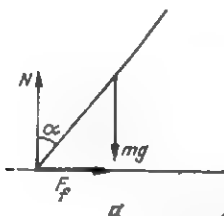
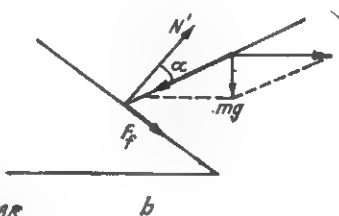


Fig. 1.2.178R



b

1.2.179. $\cos \theta = g / (\omega^2 R)$, a) $\theta = 0$, b) $\theta = 60^\circ$, $h = R(1 - \cos \theta) = 19,6 \text{ cm}$.

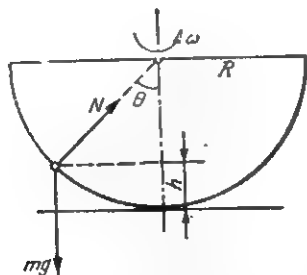


Fig. 1.2.179R

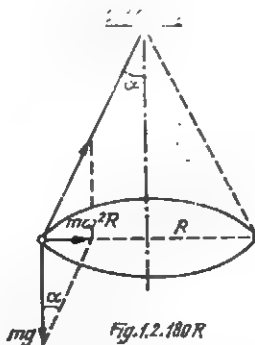


Fig. 1.2.180R

1.2.180. $R = \sqrt{l^2 - g^2 / \omega^4} = 0,79 \text{ m}$, dacă $\omega > \sqrt{g/l}$, altfel $R = 0$.

1.2.181. $T_2 = T_1 \sqrt{(g \cos \alpha_2) : [(g - a) \cos \alpha_1]} = 1,19 \text{ s}$.

$$1.2.182. N \cong \sqrt{2gh} : (2\pi v) \cong 3 \text{ rot.}$$

$$1.2.183. N = 4\pi^2 dm M : [(m + M)T^2] - 4,0 \text{ kN.}$$

$$1.2.184. n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g : \sqrt{(l+r)^2 - (R+r)^2}} = 0,56 \text{ rot/s.}$$

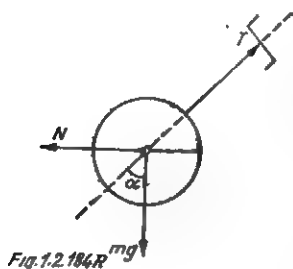


Fig. 1.2.184R

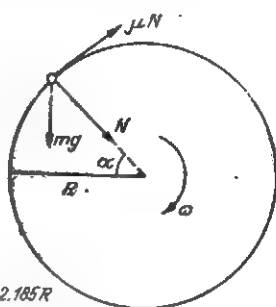


Fig. 1.2.185R

$$1.2.185. v_{\min} = \sqrt{gR : \sin \varphi} = 4,9 \text{ m/s, pentru } \alpha = \varphi.$$

$$1.2.186. \omega = \sqrt{2k \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) : \left[(M-m) \cos \frac{\alpha}{2} \right]} = 1,42 \text{ rad/s.}$$

$$1.2.187. v_0 = (1/\cos \alpha) \sqrt{Rg \sin(\alpha - \varphi) : \cos \varphi} = 0,23 \text{ m/s.}$$

$$1.2.188. k = mtg\alpha/R \cong 1 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m.}$$

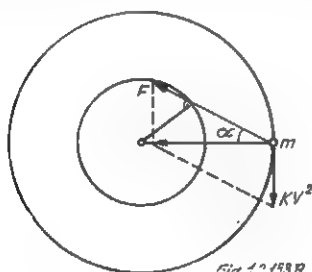


Fig. 1.2.189R

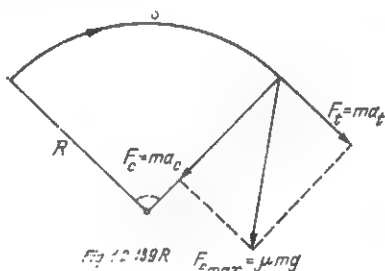


Fig. 1.2.189R

$$1.2.189. v_{\max} = \sqrt{\mu g} : \sqrt{1/R^2 + 1/(4s^2)} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$1.2.190. v_{\max} = \sqrt{gR} : \sqrt{1 + 1/(4\alpha^2)} = 14,6 \text{ m/s.}$$

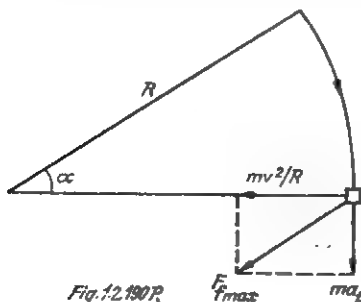


Fig. 1.2.190R

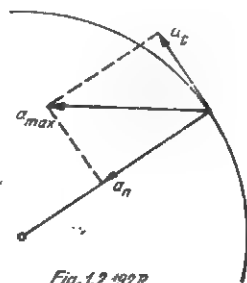


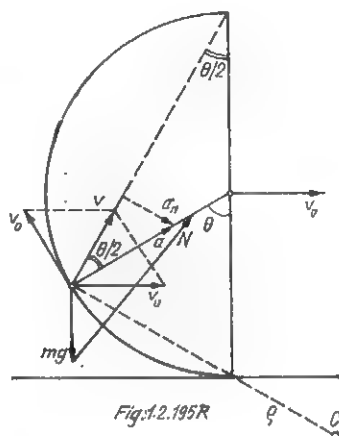
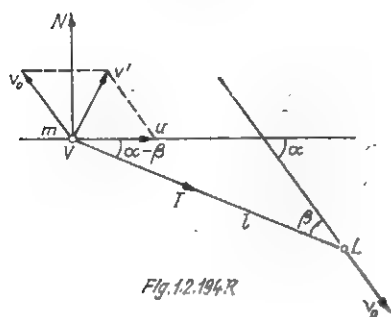
Fig. 1.2.192R

$$1.2.191. T = 2\pi n \sqrt{L : \sqrt{g(1 + m_2/m_1)}} = 12,56 \text{ s.}$$

$$1.2.192. \Delta t' = \Delta v : \sqrt{(\Delta v/\Delta t)^2 - v_0^4/R^2} = 0,17 \text{ s, } R' = v_0^2 \Delta t/\Delta v = 80 \text{ m.}$$

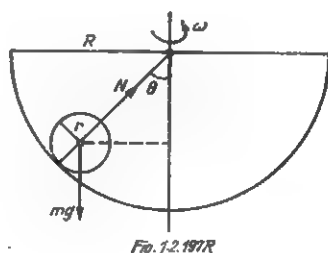
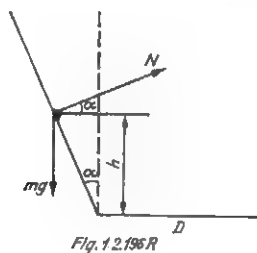
$$1.2.193. v = \sqrt[4]{R(u^2 g^2 - a_1^2)} = 17 \text{ m/s, } P = ma_1 v = 17 \text{ kN.}$$

$$1.2.194. T = m v_0^2 \sin^2 \alpha : [l \cos^4 (\alpha - \beta)] = 250 \text{ N.}$$



$$1.2.195. N^2 = (mg)^2 + (m v_0^2/R)^2 + 2mg \cdot (m v_0^2/R) \cos \theta, \rho = 4R \sin \frac{\theta}{2}.$$

$$1.2.196. \omega^2 > g \operatorname{ctg} \alpha : (D/2 + h \operatorname{tg} \alpha), \text{ deci } (h \rightarrow 0) n > \frac{1}{2\pi} \sqrt{2g \operatorname{ctg} \alpha, D} = 0,24 \frac{\text{rot}}{\text{s}}.$$



$$1.2.197. \cos \theta = g : [4\pi^2 n^2 (R - r)], \theta = 60^\circ, (\theta = 0 - \text{poziție instabilă}).$$

(*) 1.2.198. Considerăm un element de masă dm al lăncșorului care subîntinde un unghi la centru elementar $d\theta$ (în radiani). Lăncșorul fiind uniform și omogen avem $\frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{2\pi}$. Asupra elementului de masă dm

acționează următoarele forțe: $dm \cdot g$ greutatea vertical în jos, dN — reacțiunea normală a conului, și cele două tensiuni T de la capete. Compunem întâi cele două tensiuni: conform figurii rezultanta lor este

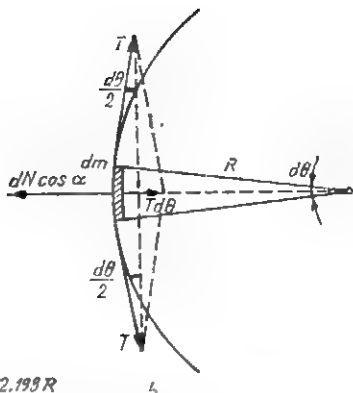
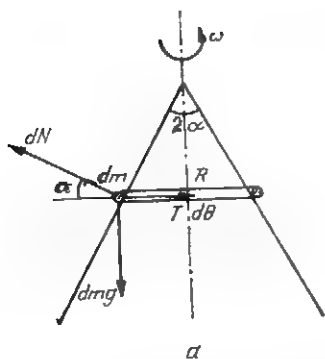


Fig. 1.2.199 R

$$2T \sin \frac{d\theta}{2} = 2T \left[\sin \frac{d\theta}{2} : \frac{d\theta}{2} \right] \cdot \frac{d\theta}{2}. \quad (1)$$

Dar

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \text{ cind } x \rightarrow 0, \quad (2)$$

deci $\sin \frac{d\theta}{2} : \frac{d\theta}{2} = 1$ deoarece este limita lui $\sin \frac{\Delta\theta}{2} : \frac{\Delta\theta}{2}$ cind $\frac{\Delta\theta}{2} \rightarrow 0$ sau altfel spus totdeauna $\sin dx = dx$ dacă dx este infinit mic (în radiani). Prin urmare, *rezultanta este $Td\theta$* .

Merită reținut acest rezultat fiindcă va interveni și în alte probleme. Elementul dm avînd o mișcare circulară uniformă, accelerația sa este centripetă, deci ecuațiile mișcării pe direcția verticală și pe direcția radială, centripetă, sînt:

$$dN \sin \alpha - dm g = 0, \quad T d\theta - dN \cos \alpha = dm \cdot \omega^2 R. \quad (3)$$

Înlocuind $d\theta = 2\pi \frac{dm}{m}$ și eliminînd dN , găsim:

$$T = \frac{m}{2\pi} (g \operatorname{ctg} \alpha + \omega^2 R) = 1,30 \text{ N}. \quad (4)$$

Problema se poate rezolva și fără a folosi diferențiale, ci judecînd cu variații foarte mici care descresc (tind) către zero: Δm , $\Delta\theta$ și cunoscînd faptul că pentru unghiuri mici $\alpha < 6^\circ$ avem binecunoscuta aproximație: $\sin \alpha \approx \alpha$ (în radiani), care este cu atît mai precisă cu cît α este mai mic, adică $\sin \alpha \rightarrow \alpha$ cind $\alpha \rightarrow 0$ (adică la limită $\sin \alpha = \alpha$).

1.2.199. $T_1 = (m\omega^2 R \cos \beta + mg \sin \beta) : \sin(\alpha - \beta)$, $T_2 = (m\omega^2 R \cos \alpha - mg \sin \alpha) : \sin(\alpha + \beta)$, dacă $\omega \geq \sqrt{g \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta / R}$. a) Dacă $\beta < \alpha$, atunci $T_1 > T_2$ și se rupe întii firul superior. b) Dacă $\beta > \alpha$, pentru $\omega_0^2 = \frac{g}{R} (\sin \alpha + \sin \beta) : (\cos \alpha - \cos \beta)$ avem $T_1 = T_2 = T_0 = mg : (\cos \alpha - \cos \beta)$, după care $T_2 > T_1$. Pentru $T_1 < T_0$ se rupe întii firul superior, pentru $T_1 > T_0$ cel inferior.

1.2.200. $N_{1,2} = \frac{mg \cos \varphi \cos(\alpha \pm \varphi)}{\sin 2\alpha} = 4,73 \text{ N, resp. } 8,2 \text{ N}.$

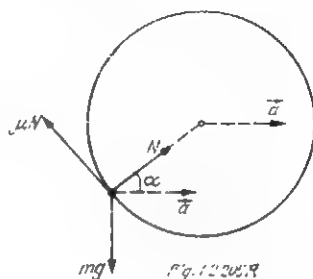
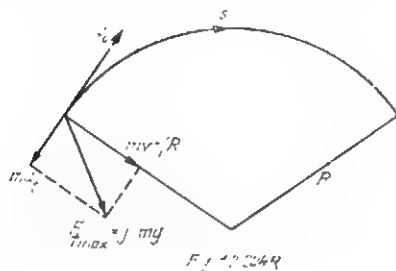
1.2.201. $v_2/v_1 = \sqrt{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) : \operatorname{tg} \varphi} = 1.2.$

1.2.202. $v = \frac{g}{r_0} \sqrt{RR_0} = 20 \text{ m/s}$, $\mu = r_0^2/(R_0 g) = 0,245$, $\alpha = \varphi = 13^\circ 46'$, $\text{tg } \alpha' = \frac{Rg}{r^2}$, $\alpha' = 11^\circ 27'$.

1.2.203. $a \cong gl/(2R) = 0,10 \text{ m/s}^2$, $\mu > l/(2R) = 0,010$.

1.2.204. $\mu = \frac{1}{r_0^2} \sqrt{1/R^2 + 1/(4s^2)} = 0,20$.

1.2.205. $\mu = (g - a \text{tg } \alpha) : (a + g \text{tg } \alpha) = 0,33$.



1.2.206. $\theta = \varphi = 30^\circ$, $F_f = mg \sin \varphi = 294 \text{ N}$.

1.2.207. $a_2 = g \sin^2 \alpha (m_1 + m_2) : (m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) = 9,0 \text{ m/s}^2$.

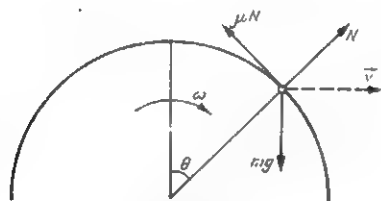


Fig. 1.2.206R



Fig. 1.2.207R

** 1.2.208. $a_n = v^2/R$, $v = \sqrt{R(A + Bt + Ct^2)}$,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{R(B + 2Ct) : [2\sqrt{A + Bt + Ct^2}]},$$

$$ds = v dt, \int ds = s = \int v dt =$$

$$= \int \sqrt{R} \sqrt{A + Bt + Ct^2} dt = \sqrt{R} \left[\frac{1}{4C} (B + 2Ct) \sqrt{A + Bt + Ct^2} + \right. \\ \left. + \frac{4AC - B^2}{8C} \int \frac{dt}{\sqrt{A + Bt + Ct^2}} \right],$$

unde ultima integrală are expresii diferite după semnul lui C și al discriminantului, de exemplu pentru $C < 0$ și $D = B^2 - 4AC > 0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{A + Bt + Ct^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \arccos \frac{B + 2Ct}{\sqrt{B^2 - 4AC}} + \text{const.}$$

$$\bullet \quad 1.2.209. \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = 3ct^2, \quad t = \sqrt{v/(3c)},$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = 6ct = 6c\sqrt{v/(3c)} = 2\sqrt{3cv} = 6,0 \text{ m/s}^2.$$

$$\bullet \quad 1.2.210. \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \theta'(t) = b - 3ct^2, \quad (1)$$

$$\omega = 0 = b - ct^2, \quad t_m = \sqrt{b/(3c)}, \quad (2)$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_m}{t_m} = \frac{2}{3}b, \quad (3)$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \omega'(t) = -6ct, \quad (4)$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{t_m} = \frac{b}{\sqrt{b/(3c)}} = \sqrt{3bc}. \quad (5)$$

$$\bullet \bullet \quad 1.2.211. \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \epsilon R,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 R}{\epsilon R} = \frac{\omega^2}{\epsilon} \text{ nu depinde de } R. \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \epsilon dt, \quad \int d\omega = \omega = \int \epsilon dt = \int \frac{b dt}{(t+c)^2} = -\frac{b}{t+c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială:
la $t = 0$ avem $\omega = 0$: $0 = -\frac{b}{c} + C$, $C = b/c$,

$$\omega = \frac{bt}{c(t+c)}. \quad (2)$$

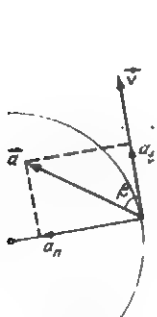


Fig. 1.2.211R

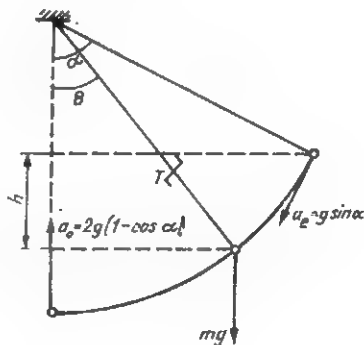


Fig. 1.2.213aR

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^{\omega} d\omega = \omega = \int_0^t \epsilon dt = \int_0^t \frac{b dt}{(t+c)^2} = -\frac{b}{t+c} \Big|_0^t = -\frac{b}{t+c} + \frac{b}{c}.$$

Introducând în (1) găsim :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{b}{c^2} t. \quad (3)$$

• 1.2.212. a) Volumul de bandă înfășurată în timpul t este $(R^2 - R_0^2)b = bhr_0t$, de unde

$$R = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} h r_0 t}, \quad (1)$$

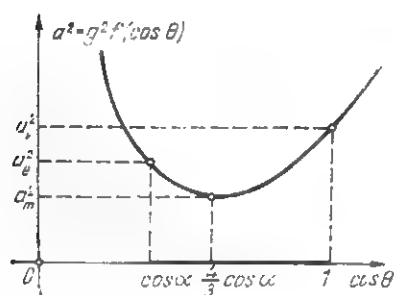
$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\pi} h r_0 : \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} h r_0 t}. \quad (2)$$

$$b) \omega = r_0/R = r_0 : \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} h r_0 t}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2\pi} h r_0^2 : \left(R_0^2 + \frac{1}{\pi} h r_0 t\right)^{3/2}. \quad (4)$$

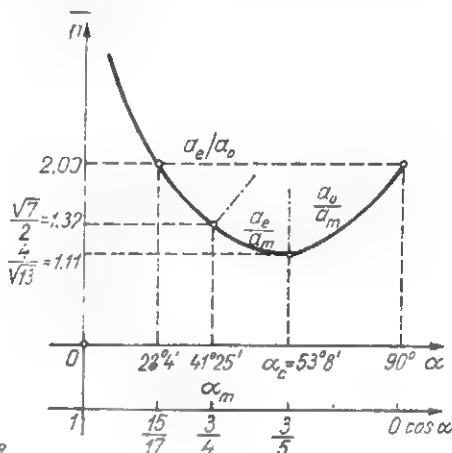
Propunem cititorului să calculeze momentul cinetic $L = I\omega = f(t)$ (I — momentul de inerție) și momentul aplicat $M = \frac{dL}{dt}$.

(*) 1.2.213. Să calculăm accelerația pentru un unghi de deviație θ oare-



b

Fig. 12.213R



c

care. Proiectăm ecuația $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ pe direcția tangențială și cea radială (normală) spre centru :

$$ma_t = mgsin\theta, \quad ma_n = mv^2/l = T - mg \cos\theta. \quad (1)$$

Ecuția de conservare a energiei dă :

$$mgh = mg(l \cos\theta - l \cos\alpha) - \frac{1}{2} mv^2 = \frac{l}{2} ma_n, \quad (2)$$

de unde accelerația totală :

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 = g^2(3 \cos^2\theta - 8 \cos\alpha \cos\theta + 4 \cos^2\alpha + 1) = g^2 f(\cos\theta). \quad (3)$$

Problema se reduce la studiul funcției pătratică în $\cos\theta$, pe intervalul $(\cos\alpha, \cos\theta = 1)$.

Reamintim că o funcție pătratică $f(x) = ax^2 + bx + c$ se reprezintă printr-o parabolă care are un extremum pentru

$$x_m = -b/(2a), \quad f_m = -(b^2 - 4ac)/(4a), \quad (4)$$

minim, dacă $a > 0$. Acest rezultat se obține și cu ajutorul derivatelor. Extremul are loc acolo unde se anulează derivata:

$$f'(x) = 2ax + b = 0, \quad x_m = -b/(2a), \quad f''(x) = 2a, \quad \text{sgn } f'' = \text{sgn } a.$$

În cazul nostru ($x = \cos \theta$):

$$f'(\cos \theta) = 6 \cos \theta - 8 \cos \alpha = 0, \quad \cos \theta_m = \frac{4}{3} \cos \alpha,$$

$$a_m^2 = g^2 \left(1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha \right), \quad f''(\cos \theta) = 6 > 0. \quad (5)$$

Deci există un *minim* dacă (vd. figura):

$$\cos \theta_m = \frac{4}{3} \cos \alpha < 1, \quad \alpha > \alpha_m = \arccos \frac{3}{4} = 41^\circ 25', \quad (6)$$

$$a_m^2 = g^2 \left(1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha \right) > 0.$$

Să calculăm accelerațiile de la capetele intervalului:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \quad a_0 &= 2g (1 - \cos \alpha), \quad (\text{normală}), \\ \theta = \pm \alpha: \quad a_e &= g \sin \alpha, \quad (\text{tangențială}). \end{aligned} \quad (7)$$

Raportul acestor accelerații:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_e} &= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad a_0 = a_e \text{ pentru } \alpha_c = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 53^\circ 8', \\ &\text{pentru } \alpha < \alpha_c \rightarrow a_0 < a_e, \\ &\text{pentru } \alpha > \alpha_c \rightarrow a_0 > a_e. \end{aligned} \quad (8)$$

Intervalul $\alpha \in (0, \pi/2)$ se împarte astfel în 3 subintervale:

$$a) \quad \alpha < \alpha_m = 41^\circ 25', \text{ adică } \cos \alpha > \frac{3}{4}, \quad (\sin \alpha < \sqrt{7}/4). \quad (9)$$

În acest caz nu există minimul a_m și $a_0 < a_e$, prin urmare

$$n = \frac{a_{\max}}{a_{\min}} = \frac{a_e}{a_0} = \frac{\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} > \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2n}, \text{ dacă } n > \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32, \text{ atunci } \alpha < \alpha_m = 41^\circ 25', \quad (11)$$

α scade monoton cu creșterea lui n .

$$b) \quad \alpha \in (\alpha_m, \alpha_c) \text{ sau } \alpha \in (41^\circ 25', 53^\circ 8'), \text{ adică } \cos \alpha \in \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4} \right). \quad (12)$$

În acest caz există $a_m = a_{\min}$ și $a_{\max} = a_e$, prin urmare:

$$n = \frac{a_{\max}}{a_{\min}} = \frac{a_e}{a_m} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}} \in \left(\frac{4}{\sqrt{13}} = 1,11, \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32 \right), \quad (13)$$

$$\sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 3}}, \text{ scade monoton cu creșterea lui } n.$$

$$c) \alpha > \alpha_c = 53^\circ 8' \text{ sau } \cos \alpha < \frac{3}{5}. \quad (14)$$

În acest caz există $a_m = a_{\min}$ și $a_{\max} = a_0$, prin urmare :

$$n = \frac{a_{\max}}{a_{\min}} = \frac{a_0}{a_m} = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}}. \quad (15)$$

Aici n scade cu creșterea lui $\cos \alpha$ (n crește odată cu α), fiindcă derivata

$$n'(\cos \alpha) = 2 \frac{\frac{4}{3} \cos \alpha - 1}{\left(1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha\right)^{3/2}} \quad (16)$$

este negativă pe intervalul considerat : $\cos \alpha < \frac{3}{5}$.

$$\cos \alpha = \frac{6 - n\sqrt{3(n^2 - 1)}}{2(n^2 + 3)}. \quad (17)$$

d) Prin urmare, n poate lua valorile

$$n \geq \frac{4}{\sqrt{13}} = 1,11, \quad (18)$$

iar pentru

$$n \in (4/\sqrt{13}, 2) \quad (19)$$

există două valori pentru amplitudine : una din ele $\in (28^\circ 4', \alpha_c = 53^\circ 8')$, iar cealalta $\in (\alpha_c = 53^\circ 8', \pi/2 = 90^\circ)$ (vd. figura).

$$** \quad 1.2.214. \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = A - B\omega,$$

separăm variabilele și integrăm :

$$dt = \frac{d\omega}{A - B\omega}, \quad \int dt = t = \frac{d\omega}{A - B\omega} = -\frac{1}{B} \ln(A - B\omega) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$

$$\text{avem } \omega = \omega_0 : 0 = -\frac{1}{B} \ln(A - B\omega_0) + C, \quad C = \frac{1}{B} \ln(A - B\omega_0),$$

$$t = \frac{1}{B} \ln \frac{A - B\omega_0}{A - B\omega}, \quad \omega = \frac{A}{B} - \left(\frac{A}{B} - \omega_0\right) e^{-Bt}.$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{A - B\omega} = -\frac{1}{B} \ln \frac{A - B\omega}{A - B\omega_0}.$$

Viteza staționară se obține când $\omega = \text{const}$, deci $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, adică $\omega_s = A/B$. Dacă $\omega_0 < \omega_s$ atunci roata se învîrte accelerat, iar dacă $\omega_0 > \omega_s$,

roata se va învîrți încetinit, în ambele cazuri viteza (unghiulară) ω , se atinge teoretic cînd $t \rightarrow \infty$.

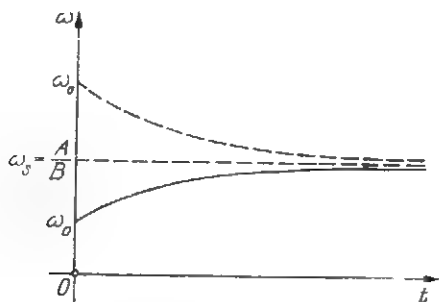


Fig. 1.2.214R

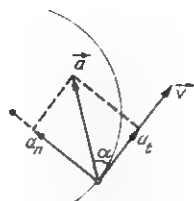


Fig. 1.2.216R

* 1.2.215. $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = s'(t) = \omega A \cos(\omega t + \alpha),$ (1)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = s''(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 s. \quad (2)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \omega^2 A \sqrt{\sin^2(\omega t + \alpha) + (A^2/R^2) \cos^4(\omega t + \alpha)}.$$

Condiția de extremum este anularea derivatei:

$$\frac{da}{dt} \sim 2 \sin(\omega t + \alpha) \cdot \omega \cos(\omega t + \alpha) - 4(A^2/R^2) \cos^3(\omega t + \alpha) \cdot \omega \sin(\omega t + \alpha) = 0, \quad (4)$$

de unde rezultă:

$$\sin(\omega t + \alpha) = 0, \text{ deci } \cos(\omega t + \alpha) = \pm 1 \text{ și } a = \omega^2 A^2/R, \quad (5)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = 0, \text{ deci } \sin(\omega t + \alpha) = \pm 1 \text{ și } a_{\max} = \omega^2 A; \quad (6)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = \pm \frac{R}{A\sqrt{2}}, \text{ deci } s = \sqrt{A^2 - R^2/2},$$

este posibil dacă $R \leq A\sqrt{2}$, atunci

$$a_{\min} = \omega^2 A \sqrt{1 - R^2/(4A^2)}. \quad (7)$$

Prima valoare (5) va fi un maxim dacă $R < A\sqrt{2}$, altfel va fi un minim (natura extremului rezultă din variația semnului derivatei).

Se poate proceda și altfel. Exprimăm accelerația prin arcu s :

$$a = \omega^2 \sqrt{s^2 + (A^2 - s^2)/R^2}. \quad (8)$$

Condiția de extremum:

$$\frac{da}{ds} \sim 2s [1 - 2(A^2 - s^2)/R^2] = 0,$$

de unde

$$s = 0, a = \omega^2 A^2/R; \quad (9)$$

$$s = \sqrt{A^2 - R^2/2}, a_{\min} = \omega^2 \sqrt{A^2 - R^2/2}. \quad (10)$$

** 1.2.216. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{dv/dt}{v^2/R}. \quad (1)$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\operatorname{ctg} \alpha dt = R \frac{dv}{v^2}, \quad \int \operatorname{ctg} \alpha dt = \int R \frac{dv}{v^2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \cdot t = -\frac{R}{v} + C, \quad (2)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0, v = v_0: 0 = -\frac{R}{v_0} + C,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot t = R \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right), \quad v = \frac{v_0 R}{R - v_0 t \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t \operatorname{ctg} \alpha dt = \int_{v_0}^v R \frac{dv}{v^2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \cdot t = R \left[\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v = R \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right). \quad (4)$$

**** 1.2.217.** Fie la un moment dat t lungimea firului x . În acest moment firul este tangent la suprafața stilpului și viteza bilei este perpendiculară pe fir, întrucât firul este inextensibil și bila nu poate avea viteză pe direcția firului. Forța verticală de greutate a bilei este echilibrată de reacțiunea normală a planului orizontal, frecările sînt neglijabile și deci rămîne numai forța de tensiune din fir, care este perpendiculară pe viteză, deci nu efectuează lucru mecanic și deci viteza *nu se schimbă în modul*. După un timp *infinit mic* dt , la momentul imediat următor $t + dt$, lungimea liberă (neînfășurată) a firului va fi $x + |dx| = x + dx$, punctul de contact al firului se deplasează cu $|dx| = R d\theta$. Dacă x este lungimea liberă a firului, atunci variația sa dx va fi *negativă* în procesul înfășurării firului. Pe de altă parte, *la limită* avem o mișcare instantanee infinitezimală, circulară, în jurul punctului de contact, cu raza x , deci $ds = v dt = x d\theta$. Dar $-dx = R d\theta$, de unde eliminînd $d\theta$ rezultă

$$v dt = x \frac{-dx}{R}, \quad dt = -\frac{x dx}{Rv}, \quad (1)$$

care prin integrare dă (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = t = \int_l^x -\frac{x dx}{Rv} = -\frac{x^2}{2Rv} \Big|_l^x = \frac{l^2 - x^2}{2Rv}. \quad (2)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$t = \int dt = -\int \frac{x dx}{Rv} = -\frac{1}{Rv} \int x dx = -\frac{x^2}{2Rv} + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0, x = l$: $0 = -l^2/(2Rv) + C, C = l^2/(2Rv)$, deci

$$t = \frac{l^2 - x^2}{2Rv}, \quad (2)$$

care ne dă timpul în care se înfășoară orice porțiune $l - x$. Punînd $l - x = -f l$, rezultă timpul cerut, precum și timpul total :

$$t = l^2 f(2 - f)/(2Rv) \text{ și } t_{\text{total}} = l^2/(2Rv). \quad (3)$$

**** 1.2.218.** Folosim rezultatele de la problema precedentă. Timpul de desfășurare este egal cu cel de înfășurare : $l^2/(2Rv)$. Dar mai trebuie adău-

gat timpul intermediar de trecere de la desfășurare la înfășurare, conform figurii: $\pi l/v$. Deci timpul total cerut :

$$T = 2 \cdot l^2 / (2Rv) + \pi l/v = \frac{l}{v} \left(\frac{l}{R} + \pi \right) = 2,00 \text{ s.}$$

** 1.2.219. $N \cos \alpha = mv^2/R$, $N \sin \alpha = mg = 0$, (1)

$$-\mu N = ma_t = m \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

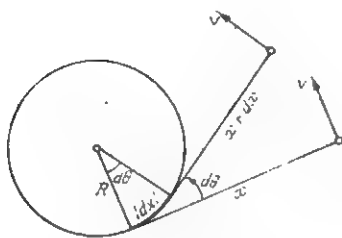


Fig. 1.2.218R

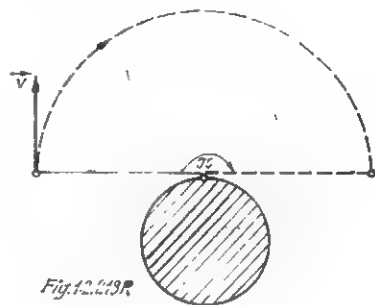


Fig. 1.2.219R

Din (1) rezultă

$$N = m\sqrt{g^2 + v^4/R^2},$$

care introdus în (2) dă ecuația :

$$-\mu m\sqrt{g^2 + v^4/R^2} = m \frac{dv}{dt}. \quad (3)$$

Pentru a găsi $s = s(r)$ înmulțim ecuația (3) cu $ds = v dt$:

$$-\mu\sqrt{g^2 + v^4/R^2} \cdot ds = \frac{dv}{dt} ds = v dr, \quad \left(\frac{ds}{dt} = v \right),$$

separăm variabilele și integrăm :

$$ds = -\frac{R v dv}{\mu\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = -\frac{R}{2\mu} \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}}.$$

Amintim integrala :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{argsh} \frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C, \quad (4)$$

unde funcția „argument sinus hiperbolic” $\operatorname{argsh} x/a$ este funcția inversă „sinusului hiperbolic”

$$\operatorname{sh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}).$$

În cazul nostru obținem :

$$\begin{aligned} \int ds = s &= -\frac{R}{2\mu} \int \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = -\frac{R}{2\mu} \operatorname{argsh} \frac{v^2}{gR} + C = \\ &= -\frac{R}{2\mu} \ln \left(\frac{v^2}{gR} + \sqrt{1 + v^4/(g^2 R^2)} \right) + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $s = 0$ și $v = v_0$:

$$0 = -\frac{R}{2\mu} \operatorname{argsh} \frac{v_0^2}{gR} + C = -\frac{R}{2\mu} \ln \left(\frac{v_0^2}{gR} + \sqrt{1 + v_0^4/(g^2 R^2)} \right) + C,$$

atunci

$$s = \frac{R}{2\mu} \left(\operatorname{argsh} \frac{v_0}{gR} - \operatorname{argsh} \frac{v^2}{gR} \right) = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}}. \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\begin{aligned} \int_0^v ds &= s = \frac{-R}{2\mu} \int_{v_0}^v \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = \frac{-R}{2\mu} \operatorname{argsh} \frac{v^2}{gR} \Big|_{v_0}^v \\ &= \frac{-R}{2\mu} \ln \left(\frac{v^2}{gR} + \sqrt{1 + v^4/(g^2 R^2)} \right) \Big|_{v_0}^v = \text{etc.} \end{aligned}$$

Punind în (5) condiția $s = 2\pi R$ și $v = 0$, obținem viteza inițială necesară:

$$v_0 = gR \operatorname{sh} 4\pi\mu = gR \frac{1}{2} (e^{4\pi\mu} - e^{-4\pi\mu}). \quad (6)$$

* 1.2.220. Pe direcția radială, centripet, principiul II se scrie:

$$F - mg \cos \theta = m v^2 / l, \quad (1)$$

$$v = l \frac{d\theta}{dt} = l \omega A \cos(\omega t + \alpha) = \pm l \omega \sqrt{A^2 - \theta^2}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F &= mg \cos \theta + m \omega^2 (A^2 - \theta^2) = mg \cos [A \sin(\omega t + \alpha)] + \\ &+ m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

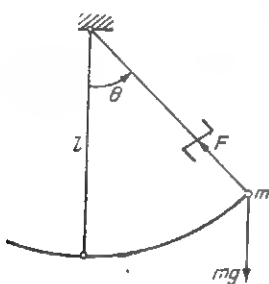


Fig. 1.2.220R

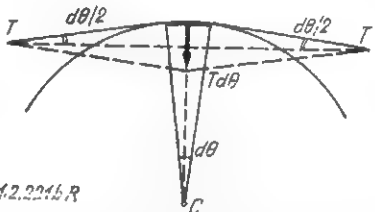
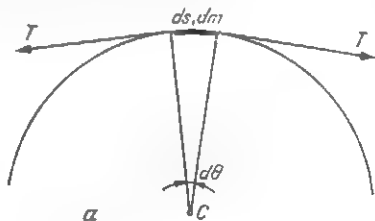


Fig. 1.2.221bR

(*) 1.2.221. Luăm un element de lanț ds cu masa dm , care subîntinde un unghi la centru infinit mic $d\theta$, ($ds = R d\theta$). Asupra elementului de lanț acționează cele două tensiuni de la capetele sale care dau rezultanta centripetă (căci $n = \text{const}$):

$$2T \sin \frac{d\theta}{2} = 2T \frac{d\theta}{2} = T d\theta,$$

(rezultat cunoscut).

Atunci, lex secunda dă

$$\begin{aligned} T d\theta &= dm \omega^2 R = \frac{m}{l} ds \omega^2 R = \frac{m}{l} R d\theta 4\pi^2 n^2 R = m n^2 l d\theta, \\ T &= m l n^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$n = \sqrt{T_r/(ml)} = 100 \text{ rot/s.}$$

Putem judeca și fără diferențiale, luând elemente foarte mici Δs , Δm , $\Delta \theta$, care descreșe (tind) către zero și folosind cunoscuta aproximație $\sin \alpha \rightarrow \alpha$ (în radiani) când $\alpha \rightarrow 0$ ($\sin \alpha \cong \alpha$ pentru $\alpha < 6^\circ$).

Forțe elastice

1.2.222. $h = \sigma_r/(s\gamma) = 60 \text{ m.}$

1.2.223. $E_{1,2} = E''(1 \pm \sqrt{1 - E'/E''}) = 120 \text{ GPa, resp. } 80 \text{ GPa.}$

1.2.224. a) $\sigma = pR'/(2d)$, se sparge cel cu rază mai mare, b) Trebuie

$$\frac{R}{d} = \text{const.}$$

(**) 1.2.225. Aflăm accelerația:

$$a = (F_1 - F_2)/m. \quad (1)$$

Pentru porțiunea din dreapta a resortului avem:

$$F_1 - T = \frac{m}{l} x \cdot a, \quad (2)$$

unde l este lungimea resortului. Înlocuind accelerația, găsim

$$T(x) = F_1 - \frac{x}{l} (F_1 - F_2). \quad (3)$$

Să găsim constanta elastică corespunzătoare unui element dx de resort. Amintim că mai multe resorturi de constante k_i , $i = 1, 2, \dots$, legate în serie, dau un resort cu constanta elastică $1/k_e = \sum 1/k_i$. Dacă resorturile sînt identice, atunci: $k_e = k'/n$, (k' — constanta unui resort). În cazul nostru considerăm resorturi elementare identice dx legate în serie și care dau resortul nostru de lungime l și de constantă k , numărul lor fiind $\frac{l}{dx}$,

deci $k = \frac{k' dx}{l}$. Tensiunea din resort variază de-a lungul resortului și asupra unui resort elementar dx luat în punctul x produce alungirea dată de:

$$\begin{aligned} T(x) &= k' \delta(dx), \\ \delta(dx) &= \frac{T(x)}{k'} = T(x) \frac{dx}{kl} = \left[F_1 - \frac{x}{l} (F_1 - F_2) \right] \frac{dx}{kl}. \end{aligned} \quad (4)$$

Sumăm aceste alungiri asupra tuturor elementelor dx , adică integrăm și obținem alungirea totală a resortului:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^l \left[F_1 - \frac{x}{l} (F_1 - F_2) \right] \frac{dx}{kl} = \frac{1}{kl} F_1 l - \frac{1}{kl^2} (F_1 - F_2) \frac{l^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2k} (F_1 + F_2) = \frac{1}{k} \frac{1}{2} (F_1 + F_2), \end{aligned} \quad (5)$$

ca și cum fiecare forță produce propria sa alungire $\frac{F}{2k}$ sau, altfel, alungirea este produsă de forța — medie aritmetică a celor două forțe de la capete. Dacă forțele de la capetele resortului care îl întind sînt egale,

obținem rezultatul binecunoscut din statică $\Delta l = F/k$, unde F este forța de la un *singur* capăt, egală cu forța de la celălalt capăt.

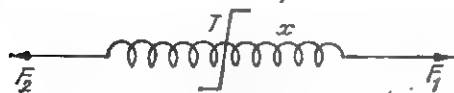


Fig. 1.2.225R

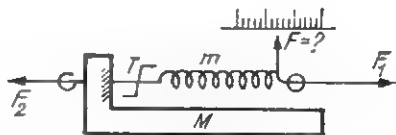


Fig. 1.2.226R

Același rezultat se poate obține elementar, judecând astfel: Conform formulei (3) tensiunea $T(x)$ variază *liniar* de la $F_1(x=0)$ până la $F_2(x=l)$. Dacă împărțim resortul într-un număr foarte mare de elemente egale Δx , atunci fiecare element este alungit proporțional cu tensiunea care domnește în locul unde se află elementul Δx . Dacă tensiunea ar fi peste tot $T = F_1$ toate elementele Δx s-ar alungi la fel și alungirea totală a resortului ar fi fost F_1/k . Dacă tensiunea ar fi peste tot $T = F_2$ atunci alungirea totală ar fi F_2/k . Or, tensiunea variază *liniar* de la F_1 la F_2 și elementele Δx se alungesc proporțional cu tensiunea, deaceia putem considera o tensiune — *medie aritmetică*, care produce deci alungirea totală a resortului dată de formula (5).

$$(**) \quad 1.2.226. \quad F_1 - F_2 = (m + M)a, \quad F_1 - T = ma, \quad (1)$$

de unde

$$T = \frac{F_1 M + F_2 m}{M + m}. \quad (2)$$

Conform problemei precedente resortul se va lungi cu

$$\Delta l = \frac{F_1 + T}{2k} \quad (3)$$

și deci forța arătată va fi

$$F = k\Delta l = \frac{1}{2}(F_1 + T) = \frac{F_1(2M + m) + F_2 m}{2(M + m)} = F_1 + (F_2 - F_1) \frac{m}{2(M + m)}. \quad (4)$$

Dacă masa resortului este neglijabilă ($m = 0$), dinamometrul indică forța $F = F_1$, atunci T va fi tot F_1 .

1.2.227. Dacă $T_r \leq 2mg$, atunci $h = (T_r - mg)/k$. Dacă $T_r > 2mg$,

$$\text{atunci } h = \frac{mg}{2k} \left[\left(\frac{T_r}{mg} - 1 \right)^2 + 1 \right] = 5,0 \text{ cm.}$$

$$1.2.228. \quad k = \frac{mg}{l_0} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 100 \text{ N/m.}$$

$$1.2.229. \quad \frac{5F}{k} = 0,50 \text{ m.}$$

$$1.2.230. \quad k = \frac{m}{f} [(1 + f)\omega_2^2 - \omega_1^2] = 182 \text{ N/m.}$$

(*) 1.2.231. Să considerăm un element de masă dm al inelului care subîntinde un unghi la centru $d\theta$ (în radiani), astfel încît

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (1)$$

Să compunem cele două tensiuni care acționează asupra elementului: $2T \sin \frac{d\theta}{2}$. Dar $\frac{\sin(d\theta/2)}{d\theta/2} = 1$ fiind limita raportului $\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}$ când $\Delta\theta \rightarrow 0$. Rezultă: $2T \sin \frac{d\theta}{2} = T d\theta$ (rezultat cunoscut). Dealtfel, pentru

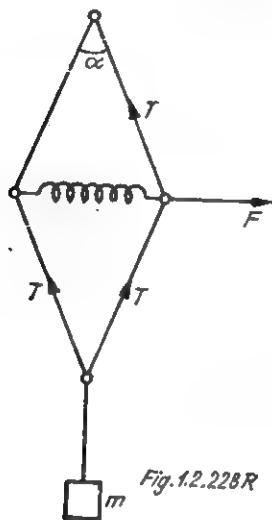


Fig. 1.2.228R

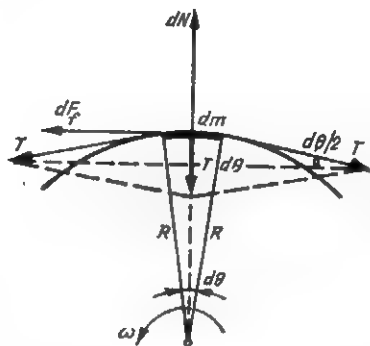


Fig. 1.2.231R

unghiuri $\alpha \rightarrow 0$, $\sin \alpha$ se aproximează cu unghiul α (în rad) oricât de precis și la limită putem înlocui $\sin \alpha$ cu α , adică putem scrie riguros: $\sin d\theta = d\theta$.

Pe direcția radială pentru elementul dm care se mișcă circular avem

$$Td\theta - dN = dm \omega^2 R, \quad (2)$$

iar pe direcția transversală:

$$dF_f = dm a_t = dm \varepsilon R. \quad (3)$$

Să considerăm acum momentul critic cînd inelul este gata să lunece: în acest moment inelul încă se rotește solidar cu cilindrul și fiind la limita alunecării, forța de frecare devine $dF_f = \mu dN$.

Sistemul devine:

$$Td\theta - dN = \frac{m}{2\pi} d\theta \varepsilon^2 R, \quad \mu dN = \frac{m}{2\pi} d\theta \varepsilon R. \quad (4)$$

Eliminînd pe dN și

$$T = k\Delta l = k(2\pi R - l_0), \quad (5)$$

găsim

$$t = \sqrt{(2\pi\mu T - m\varepsilon R) : (\mu m \varepsilon^2 R)} = \sqrt{[2\pi\mu k(2\pi R - l_0) - m\varepsilon R] : (\mu m \varepsilon^2 R)} = 100 \text{ s.}$$

1.2.232. $N = m \cos \alpha [kg - v^2 (mg + kl \sin \alpha)] : (k - m\omega^2 \cos^2 \alpha)$ se anulează pentru $\omega_0^2 = kg : (mg + kl \sin \alpha) = 120 \text{ rad}^2/\text{s}^2 < \omega^2$, deci corpul se desprinde:

$$x = m\omega^2 l : (k - m\omega^2) = 29.4 \text{ cm}; \quad \omega_{\max} = \sqrt{k/m} = \sqrt{300} \text{ rad/s, cînd } x \rightarrow \infty.$$

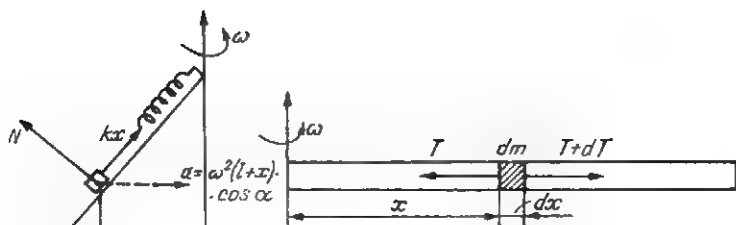


Fig. 1.2.232R

Fig. 1.2.233R

**** 1.2.233.** Să considerăm un element de masă dm situat la distanța x de axa de rotație și având lungimea dx . Acesta are o mișcare circulară uniformă deci rezultanta forțelor este centripetă și accelerația este centripetă. Pe direcția radială (spre centru) avem :

$$+ T - (T + dT) = dm\omega^2 x, \quad (1)$$

dar

$$dm = \frac{m}{l} dx, \quad (2)$$

rezultă

$$dT = -\frac{m}{l} \omega^2 x dx \quad (3)$$

și prin integrare (nedefinită) :

$$T = \int dT = -\int \frac{m}{l} \omega^2 x dx = -\frac{m}{l} \omega^2 \int x dx = -\frac{m}{l} \omega^2 \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția la margine ca pentru $x = l$ să avem $T = 0$: $0 = -\frac{m}{l} \omega^2 \frac{1}{2} l^2 + C$, astfel încît :

$$T(x) = \frac{1}{2l} m\omega^2(l^2 - x^2). \quad (4)$$

Se poate integra și definit, ținînd seama că limitele de integrare trebuie să se corespundă : (x, T) , $(x = l, T = 0)$:

$$\int_T^0 dT = -\int_x^l \frac{m}{l} \omega^2 x dx \text{ sau } -T = -\frac{m}{2l} \omega^2 x^2 \Big|_x^l = -\frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - x^2).$$

Reacțiunea articulației :

$$T(0) = -\frac{1}{2} m\omega^2 l. \quad (5)$$

1.2.234. $\omega = \sqrt{g : (l_0 \cos \alpha + mg/k)} = 4,0 \text{ rad/s.}$

(*) 1.2.235. Să considerăm un element de masă dm din fir, care subîntinde un unghi la centru $d\theta$ (în rad). Acest element are o mișcare circulară uniformă deci forța rezultantă trebuie să fie centripetă ca și accelerația.

Compunem cele două tensiuni: $2T \sin \frac{d\theta}{2} = T d\theta$ (rezultat cunoscut),

deoarece $\left(\sin \frac{d\theta}{2}\right) : \frac{d\theta}{2} = 1$, fiind limita cunoscută

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1,$$

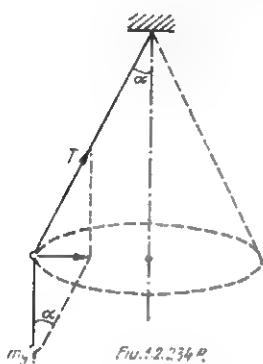


Fig. 1.2.234 p.

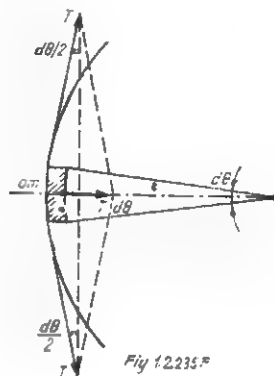


Fig. 1.2.235 p.

(altfel spus, $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, sinusul unui unghi mic $\Delta x \rightarrow 0$ se aproximează oricât de precis prin unghiul în sine în radiani).

Legea fundamentală pe direcția radială se scrie atunci:

$$T d\theta = dm \omega^2 R, \text{ dar } \frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{2\pi}, \quad (1)$$

deci

$$T = \frac{1}{2\pi} m \omega^2 R = k(2\pi R - l_0), \quad (2)$$

de unde

$$R = [l_0(2\pi)] : [1 - m\omega^2/(4\pi^2 k)] = 32 \text{ cm}. \quad (3)$$

Firul se lungeste cu $\Delta l = 2\pi R - l_0 = 101 \text{ cm}$. (4)

•• 1.2.236. Aplicăm teorema variației energiei cinetice:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = L = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^s F_s ds = \int_0^s m a_s ds = m \int_0^s a_s ds,$$

de unde rezultă formula cerută.

În cazul oscilatorului armonic:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x -\frac{kx}{m} dx = v_0^2 - \frac{k}{m} x^2 \Big|_{x_0}^x,$$

care dă legea de conservare a energiei:

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \text{const.}$$

•• 1.2.237. Diferențiem legea mișcării : $ds = nb^n r^{n-1} dr$, (1)

dar $ds = v dt$,

de unde, separând variabilele și integrând :

$$dt = nb^n v^{n-2} dv, \quad \int dt = \int nb^n v^{n-2} dv, \quad (2)$$

$$t = nb^n \frac{v^{n-1}}{n-1} + C, \text{ dacă } n \neq 1. \quad (3)$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $s = 0$ și din legea mișcării $0 = b^n r_0^n c^n$, $r_0 = c/b$:

$$0 = nb^n \frac{c^{n-1}}{(n-1)b^{n-1}} + C, \quad C = -\frac{nb}{n-1} c^{n-1}.$$

Rezultă

$$t = \frac{n}{n-1} (b^n r^{n-1} - bc^{n-1}), \quad v = \sqrt[n-1]{(c/b)^{n-1} + (n-1)t/(nb^n)}, \quad n \neq 1. \quad (4)$$

Dacă $n = 1$:

$$s = bv - c, \quad ds = v dt = b dr, \quad dt = \frac{b}{v} dv,$$

$$t = b \ln v + C, \quad 0 = b \ln v_0 + C, \quad v_0 = c/b,$$

$$t = b \ln \frac{v}{v_0}, \quad v = v_0 e^{t/b} = \frac{c}{b} e^{t/b}. \quad (5)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v nb^n r^{n-2} dr = nb^n \left. \frac{r^{n-1}}{n-1} \right|_{v_0}^v = \text{etc.}, \quad v_0 = c/b, \quad n \neq 1,$$

respectiv pentru $n = 1$:

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v b \frac{dr}{r} = \text{etc.}, \quad v_0 = c/b.$$

•• 1.2.238. $ds = v dt$, integrăm

$$s_m = \int_0^{t_m} ds = \int_0^{t_m} v dt = \text{aria } S \text{ de sub graficul vitezei} = \frac{1}{2} \pi t_m \cdot v_0, \quad (\text{aria elipsei este } \pi ab). \quad (1)$$

Să stabilim legea mișcării. Din ecuația elipsei, cunoscând semiaxele, deducem legea vitezei :

$$\frac{v^2}{v_0^2} + \frac{t^2}{t_m^2} = 1, \quad r = r_0 \sqrt{1 - t^2/t_m^2} = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v dt,$$

$$x = \int_0^x dx = \int_0^t v_0 \sqrt{1 - t^2/t_m^2} dt. \quad (2)$$

Amintim integrala :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C. \quad (3)$$

În cazul nostru :

$$x = \int_0^t \frac{v_0}{t_m} \sqrt{t_m^2 - t^2} dt = \frac{v_0}{t_m} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{t_m^2 - t^2} + \frac{1}{2} t_m^2 \arcsin \frac{t}{t_m} \right) =$$

$$= \frac{v_0}{t_m} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{t_m^2 - t^2} + \frac{1}{2} t_m^2 \arcsin \frac{t}{t_m} \right) = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{1 - t^2/t_m^2} + \frac{1}{2} v_0 t_m \arcsin \frac{t}{t_m}.$$

Pentru $t = t_m$ regăsim $x = x_m$. Se poate integra și nedefinit :

$$x = \int dx = \int \frac{v_0}{t_m} \sqrt{t_m^2 - t^2} dt = \frac{v_0}{t_m} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{t_m^2 - t^2} + \frac{1}{2} t_m^2 \arcsin \frac{t}{t_m} \right) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C = 0$.

**** 1.2.239.** a) Timpul de traversare a riului $\tau = b/v_0$. Deplasarea la vale la un moment dat $t = y/v_0$:

$$dx = v dt, \quad \int dx = x = \int v dt = \int k \sqrt{y} \frac{dy}{v_0} = \frac{k}{v_0} \frac{2}{3} y^{3/2} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine : pentru $y = 0$, $x = 0$, deci $C = 0$:

$$x = \frac{2k}{3v_0} y^{3/2}, \quad y \leq b/2. \quad (1)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

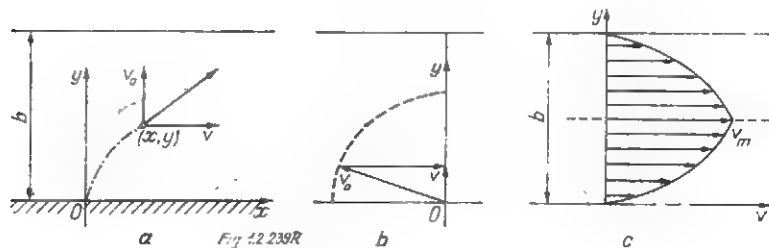
$$\int_0^x dx = x = \int_0^y k \sqrt{y} \frac{dy}{v_0} = \frac{k}{v_0} \frac{2}{3} y^{3/2}.$$

La mijlocul riului deplasarea la vale va fi :

$$x_0 = \frac{2k}{3v_0} \frac{b^{3/2}}{2\sqrt{2}}, \quad (2)$$

și deci deplasarea totală (în virtutea simetriei) :

$$d = 2x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{kb^3}{v_0}. \quad (3)$$



b) Viteza de traversare, față de țărm, perpendiculară pe țărm, este

$$\sqrt{v_0^2 - v^2} = \frac{dy}{dt}. \quad (4)$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}}, \quad \int dt = t = \int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}} = -\frac{2}{k^2} \sqrt{v_0^2 - k^2 y} + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială:

$$\text{la } t = 0, y = 0: 0 = -\frac{2}{k^2} v_0 + C', \quad C' = \frac{2}{k^2} v_0,$$

$$t = \frac{2v_0}{k^2} (1 - \sqrt{1 - k^2 y/v_0^2}), \quad y \leq b/2. \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^y dt = t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}} = -\frac{2}{k^2} \sqrt{v_0^2 - k^2 y} \Big|_0^y.$$

Timpul total de traversare a riului va fi (în virtutea simetriei) dublul timpului de traversare pînă la mijlocul riului:

$$\tau = 2 \cdot \frac{2v_0}{k^2} [1 - \sqrt{1 - k^2 b/(2v_0^2)}]. \quad (6)$$

c) Punînd $y = b/2$ avem $v_m = k \sqrt{b/2}$, deci

$$k = v_m \sqrt{2/b}, \quad (7)$$

unde v_m este viteza maximă de curgere a riului (la mijlocul riului).

* 1.2.240. Conform figurii:

$$a = a_t / \cos \alpha, \quad (\text{dacă } \alpha \neq \pi/2), \quad a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

$$\cos \alpha = v_r / v, \quad v_r = \frac{dr}{dt}, \quad (2)$$

de unde

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{v}{v_r} = \frac{v dr}{dr}. \quad (3)$$

Dacă $\alpha = \pi/2$, atunci $\vec{v} \perp \vec{r}$, $\vec{v} \perp \vec{a}$, deci $a_t = 0 = \frac{dv}{dt}$, deci $v = \text{const}$, $v_r = 0$, rezultă mișcarea circulară uniformă.

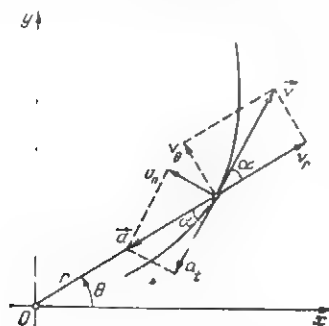


Fig. 1.2.240R

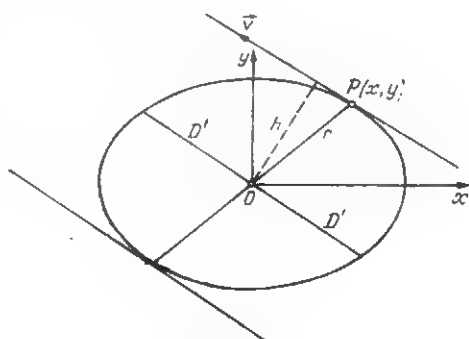


Fig. 1.2.243R

Se poate aplica teorema variației energiei cinetice :

$$dL = dE_c,$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r dr + F_\theta r d\theta, \quad (4)$$

dar

$$F_\theta \equiv 0 \text{ și } F_r = F = ma, \quad dE_c = mrv, \text{ etc.}$$

$$(*) \quad 1.2.241. \quad v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = x'(t) = b; \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = y'(t) = c - 2ht, \quad (1)$$

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{x} = 0; \quad a_y = \ddot{y} = \ddot{y} = -2h. \quad (2)$$

Unghiul dintre doi vectori se poate calcula analitic (cu ajutorul componentelor într-un SO) astfel :

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (3)$$

Dar expresia analitică a produsului scalar într-un SO ortogonal este

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4)$$

În cazul nostru :

$$\cos\alpha = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-2h(c-2ht)}{\sqrt{b^2 + (c-2ht)^2} \cdot \sqrt{2|h|}}. \quad (5)$$

Deoarece mișcarea pe axa Ox este uniformă, iar pe axa Oy uniform accelerată, vitezele și accelerațiile respective se obțin imediat, fără ajutorul derivatelor.

$$** \quad 1.2.242. \quad \frac{dy}{dt} = v_y = v_0, \quad dy = v_0 dt, \quad (1)$$

de unde prin integrare :

$$\int dy = y = \int v_0 dt = v_0 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0, y = 0$; rezultă $C = 0$, deci

$$y = v_0 t. \quad (2)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^y dy = y = \int_0^t v_0 dt = v_0 t.$$

Acum rezultă imediat :

$$v_x = A\sqrt{y} = A\sqrt{v_0 t}. \quad (3)$$

Integrăm mai departe :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{v_0 t}, \quad dx = v_x dt = A\sqrt{v_0 t} dt, \quad (4)$$

de unde prin integrare :

$$\int dx = x = \int A\sqrt{v_0 t} dt = \frac{2}{3} A\sqrt{v_0} t^{3/2} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 0$;

$$x = \frac{2}{3} A\sqrt{v_0} t^{3/2}. \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t A \sqrt{v_0} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} A \sqrt{v_0} t^{3/2}.$$

Prin eliminarea timpului t din ecuațiile cinematice ale mișcării (2) și (5) găsim ecuația explicită a traiectoriei:

$$y = \left(\frac{3}{2A} v_0 x \right)^{2/3} \text{ sau } x = \frac{2A}{3v_0} y^{3/2}, \quad (6)$$

care este o „parabolă semicubică”.

* 1.2.243. a) Ecuațiile cinematice ale mișcării reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei în care parametrul este timpul. Prin eliminarea parametrului (timpului) obținem traiectoria eliptică:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ (parcurșă în sens trigonometric)}. \quad (1)$$

$$b) \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega A \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \omega B \cos \omega t,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t} = \omega A B \sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}. \quad (2)$$

Ecuația tangentei la elipsă în punctul $P(x, y)$:

$$\frac{xX}{A^2} + \frac{yY}{B^2} = 1$$

sau sub forma normală:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} \left(\frac{xX}{A^2} + \frac{yY}{B^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}}.$$

Atunci distanța de la centrul elipsei (0,0) până la tangentă:

$$h = \frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} \quad (3)$$

și expresia vitezei devine:

$$v = \omega A B / h. \quad (4)$$

Pe de altă parte, folosind teorema lui Apollonius:

$$D'^2 + D^2 = A^2 + B^2, \quad (5)$$

unde D, D' sînt semidiametrele conjugate, avem pentru semidiametrul D' conjugat cu raza vectoare $D^2 = x^2 + y^2$:

$$D'^2 = A^2 + B^2 - x^2 - y^2 = A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t = c^2 / \omega^2,$$

deci

$$D' = \omega D', \quad D' = A B / h. \quad (6)$$

unde D' este semidiametrul conjugat cu raza vectoare.

$$c) \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = -\omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 y,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r, \quad (7)$$

orientată spre centrul elipsei.

Accelerația tangențială se obține prin derivarea vitezei (2):

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \omega A B \frac{x\dot{x}/A^4 + y\dot{y}/B^4}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \frac{\omega^2 xy(1/B^2 - 1/A^2)}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \omega^2 h xy(1/B^2 - 1/A^2). \quad (8)$$

Accelerația normală:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \omega^2 h. \quad (9)$$

d) Se știe că $a_n = v^2/R$, unde R este raza de curbura a traiectoriei în punctul considerat. Atunci

$$a_n = \omega^2 h = v^2/R = \omega^2 A^2 B^2 / (Rh^2),$$

de unde rezultă

$$R = A^2 B^2 / h^3 = A^2 B^2 (x^2/A^4 + y^2/B^4)^{3/2}. \quad (10)$$

•• 1.2.244. a) $x = OC = R \sin \theta = R(\theta - \sin \theta)$,

$$y = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

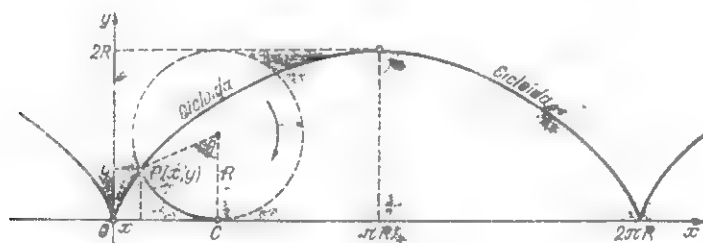


Fig. 12.244R

$$\text{b) } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = R(\dot{\theta} - \cos \theta \cdot \dot{\theta}) = R\dot{\theta}(1 - \cos \theta),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = R \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \quad (2)$$

unde am derivat pe $\sin \theta$ și $\cos \theta$ în raport cu timpul ca funcție de funcție, deoarece $\theta = \theta(t)$.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2R^2\dot{\theta}^2(1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Derivăm această relație în raport cu timpul ($r = \text{const}$, deci $\dot{r} = 0$):

$$2r\dot{\theta} = 0 = 2R^2[2\dot{\theta}\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \theta \cdot \dot{\theta}], \text{ de unde}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{2} \dot{\theta} \sin \theta : (1 - \cos \theta). \quad (4)$$

Atunci accelerația a_y devine:

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = R \cos \theta \dot{\theta}^2 + R \sin \theta \ddot{\theta} = R\dot{\theta}^2 \left[\cos \theta - \sin \theta \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right] = \\ &= -R\dot{\theta}^2 \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) = -\frac{v^2}{4R}. \end{aligned} \quad (5)$$

c) Lungimea unui element de traiectorie:

$$ds = v dt = R\dot{\theta} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} dt = 2R\dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} dt = 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

de unde prin integrare:

$$s = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -4R \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8R. \quad (6)$$

• 1.2.245. Deoarece $v = \text{const}$, rezultă

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ și } a_n = a = v^2/R,$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei. Cine cunoaște formula razei de curbură a unei curbe plane:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

poate calcula imediat:

$$y' = \frac{1}{2} (e^{x/b} - e^{-x/b}), \quad y'' = \frac{1}{2b} (e^{x/b} + e^{-x/b}) = 1/b^2, \quad (2)$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4} e^{2x/b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x/b} = y^2/b^2,$$

$$\text{deci} \quad \frac{1}{R} = \frac{y/b^2}{(y^2/b^2)^{3/2}} = \frac{b}{y^2} \quad (3)$$

și atunci accelerația

$$a = a_n = v^2/R = \frac{bv^2}{y^2}. \quad (4)$$

Dacă nu cunoaștem formula (1) putem calcula astfel:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' \dot{x}, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 (1 + y'^2). \quad (5)$$

Condiția $v = \text{const}$ dă prin derivarea relației precedente:

$$2v \dot{v} = 0 = 2\dot{x}\ddot{x}(1 + y'^2) + \dot{x} \cdot 2y'y''\dot{x},$$

$$\text{de unde} \quad \ddot{x} = -\frac{y'y''\dot{x}^2}{1 + y'^2}. \quad (6)$$

$$\text{Accelerația:} \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y} = y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x}. \quad (7)$$

Înlocuind aici pe \ddot{x} (6) găsim

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{y''\dot{x}^2}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (8)$$

Ținând seama de expresia vitezei (5), găsim

$$a = \frac{v^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{R}. \quad (9)$$

Înlocuind derivatele calculate în (2), găsim

$$a = \frac{bv^2}{y^2}, \quad R = \frac{y^2}{b}. \quad (10)$$

(*) 1.2.246. $a_x = \ddot{r}_{0x} = 0$, $a_y = a = a_n \cos \alpha$, $a_n = v^2/R$, $\cos \alpha = v_x/v$, rezultă

$$a = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{v}{v_{0x}} = \frac{v^3}{Rv_{0x}}.$$

• 1.2.247. Plecăm de la definiția razei de curbură $R = \frac{ds}{d\theta}$ sau $ds = R d\theta$, unde $d\theta$ este unghiul subîntins de arcul elementar ds , unghi definit de normalele la traiectorie de la marginile (capetele) lui ds sau altfel unghiul cu care se rotește tangenta la traiectorie cînd ne deplasăm pe curbă cu ds . Pe de altă parte, viteza pe traiectorie (viteza scalară) este $v = \frac{ds}{dt}$. Rezultă

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R \dot{\theta}.$$

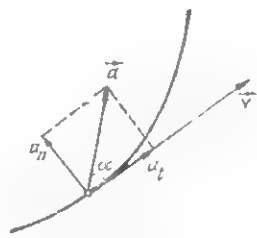
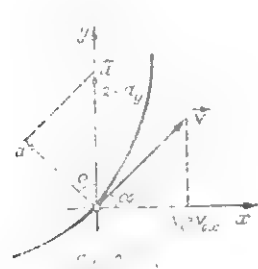


Fig. 1.2.247R

• 1.2.248. $\text{ctg} \alpha = a_t/a_n = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{R}{v^2}$, dar $R = \frac{ds}{d\theta}$, (1)

$$\text{ctg} \alpha = \frac{dv}{dt} \frac{ds}{d\theta} \frac{1}{v^2} = \frac{dv}{v d\theta}, \left(\frac{ds}{dt} = v \right). \quad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\frac{dv}{v} = \text{ctg} \alpha \cdot d\theta, \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta} \text{ctg} \alpha \cdot d\theta, \quad \ln \frac{v}{v_0} = (\theta - \theta_0) \text{ctg} \alpha, \quad v = v_0 e^{(\theta - \theta_0) \text{ctg} \alpha}. \quad (3)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$\int \frac{dv}{v} = \int \text{ctg} \alpha \cdot d\theta, \ln v = \text{ctg} \alpha \cdot \theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $v = v_0$ corespunde $\theta = \theta_0$:

$$\ln v_0 = \text{ctg} \alpha \cdot \theta_0 + C, \quad C = \ln v_0 - \text{ctg} \alpha \cdot \theta_0, \text{ etc.}$$

• 1.2.249. a) Mișcarea se compune dintr-o mișcare circulară uniformă în planul Oxy și o translație uniformă după axa Oz : traiectoria este o elice înfășurată pe un cilindru de rază r (ca filetul sau ghiventul unui șurub). Pasul elicei este

$$h = cT = c \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

și unghiul de înclinare față de Oz :

$$\text{tg} \alpha = \frac{2\pi r}{h} = \frac{r\omega}{c}. \quad (2)$$

b) $v_s = \dot{x} = -\omega r \sin \omega t$, $v_y = \dot{y} = +\omega r \cos \omega t$, $v_z = \dot{z} = 0$;
 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + \omega^2 r^2} = \omega r \sqrt{1 + 1} = \omega r \sqrt{2} = \text{const.} \quad (3)$

c) $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, ($v = \text{const}$), deci

$a_s = \ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x$; $a_y = \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y$, (4)
 $a_z = \ddot{z} = 0$; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 r$.

Dar $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, ($v = \text{const}$), de aceea

$$a = a_n = \omega^2 r = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{r} = \frac{v^2}{R}, \quad (5)$$

de unde rezultă raza de curbura :

$$R = \frac{r}{\sin^2 \alpha} = r(1 + \cot^2 \alpha) = r + \frac{v^2}{r\omega^2}. \quad (6)$$

• 1.2.250. $\frac{dy}{dv} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dt} y' \cdot \frac{dt}{dx} = (y') \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y} - \ddot{x} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\dot{x}^3}. \quad (1)$$

$$-F_f \cos \alpha = ma_x = m\ddot{x}, \quad -F_f \sin \alpha - mg = ma_s = m\ddot{y}, \quad (2)$$

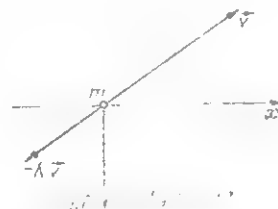
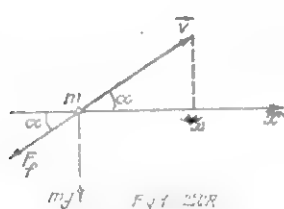
dar $\cos \alpha = v_x/v = \dot{x}/v$, $\sin \alpha = v_y/v = \dot{y}/v$. (3)

Din (2), (3) rezultă derivatele :

$$\ddot{x} = -F_f \frac{\dot{x}}{mv}, \quad \ddot{y} = -F_f \frac{\dot{y}}{mv} - g, \quad (4)$$

care înlocuite în (1) dau

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{\dot{x}^2} = -\frac{g}{v_x^2}. \quad (5)$$



** 1.2.251. Viteza limită de cădere liberă se obține atunci cind forțele se echilibrează (forța de rezistență echilibrează greutatea) și accelerația se anulează :

$$mg - kv = 0, \quad k = mg/v. \quad (1)$$

a) Lex secunda :

$$-kv_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt}, \quad -mg - kv_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt}. \quad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = - \frac{m dv_x}{k v_x}, \quad \int dt = t = - \frac{m}{k} \int \frac{dv_x}{v_x} = - \frac{m}{k} \ln v_x + C_1,$$

$$dt = - \frac{m dv_y}{mg + k v_y}, \quad t = - \frac{m}{k} \int \frac{k dv_y}{mg + k v_y} = - \frac{m}{k} \ln(mg + k v_y) + C_2.$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $v_x = v_0 \cos \alpha_0$, $v_y = v_0 \sin \alpha_0$. Atunci rezultă :

$$t = - \frac{m}{k} \ln \frac{v_x}{v_0 \cos \alpha_0}, \quad v_x = v_0 \cos \alpha_0 e^{-kt/m} = v_0 \cos \alpha_0 e^{-t/\tau}, \quad (3)$$

$$t = - \frac{m}{k} \ln \frac{mg + k v_y}{mg + k v_0 \sin \alpha_0} = - \frac{c}{g} \ln \frac{c + v_y}{c + v_0 \sin \alpha_0}, \quad v_y = (v_0 \sin \alpha_0 + c) e^{-gt/c} - c. \quad (4)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă) :

$$\int_0^t dt = t = - \frac{c}{g} \int_{v_0 \cos \alpha_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = - \frac{c}{g} \ln \frac{v_x}{v_0 \cos \alpha_0},$$

$$\int_0^t dt = t = - \frac{c}{g} \int_{v_0 \sin \alpha_0}^{v_y} \frac{dv_y}{c + v_y} = - \frac{c}{g} \ln \frac{c + v_y}{c + v_0 \sin \alpha_0}.$$

b) Continuăm integrarea :

$$dx = v_x dt, \quad \int dx = x = \int v_0 \cos \alpha_0 e^{-t/\tau} dt = - \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 e^{-t/\tau} + C_1,$$

$$dy = v_y dt, \quad \int dy = y = \int [(v_0 \sin \alpha_0 + c) e^{-gt/c} - c] dt =$$

$$= - \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) e^{-gt/c} - ct + C_2,$$

unde constantele de integrare se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$, avem $x = 0$, $y = 0$, rezultă atunci :

$$x = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (5)$$

$$y = \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) (1 - e^{-t/\tau}) - ct. \quad (6)$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^t dx = x = \int_0^t v_0 \cos \alpha_0 e^{-t/\tau} dt = - \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 e^{-t/\tau} \Big|_0^t =$$

$$= - \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 (e^{-t/\tau} - 1),$$

$$\int_0^t dy = y = \int_0^t [(v_0 \sin \alpha_0 + c) e^{-gt/c} - c] dt = - \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) e^{-gt/c} \Big|_0^t - ct \Big|_0^t =$$

$$= - \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) (e^{-t/\tau} - 1) - ct.$$

c) Timpul de urcare la înălțimea maximă rezultă imediat din (4) condiția $v_y = 0$:

$$t_m = \frac{c}{g} \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right).$$

d) Coordonatele înălțimii maxime se pot obține înlocuind $t = t_m$ în (5) și (6):

$$x_m = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha_0} \right) = \frac{v_0^2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0}{g \left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha_0 \right)}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha_0} \right) - \frac{1}{g} c^2 \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right) = \\ &= \frac{c}{g} v_0 \sin \alpha_0 - \frac{c^2}{g} \ln \left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha_0 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

e) Pentru a obține ecuația explicită a traiectoriei eliminăm timpul din ecuațiile (5) și (6):

$$\begin{aligned} t &= -\frac{c}{g} \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} \right), \\ y &= \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} - c \cdot \left(-\frac{c}{g} \right) \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} \right) = \\ &= \frac{v_0 \sin \alpha_0 + c}{v_0 \cos \alpha_0} \cdot x + \frac{c^2}{g} \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Traectoria are o asimptotă verticală, cînd se anulează argumentul logaritmului:

$$1 - \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} = 0, \quad x = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0. \quad (11)$$

f) Cazul aruncării în vid se obține făcînd $k = 0$, adică $c \rightarrow \infty$ (amintim dezvoltarea în serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots):$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha_0, \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} v_y \rightarrow (v_0 \sin \alpha_0 + c) (1 - gt/c) - c \rightarrow v_0 \sin \alpha_0 - gt; \end{cases} \quad (4')$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 (gt/c) = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t, \end{cases} \quad (5')$$

$$\begin{cases} y \rightarrow \frac{c}{g} (v_0 \sin \alpha_0 + c) (gt/c - g^2 t^2 / (2c^2)) - ct \rightarrow v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (6')$$

Folosim dezvoltarea

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots;$$

$$t_m \rightarrow \frac{c}{g} \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 = \frac{1}{g} v_0 \sin \alpha_0. \quad (7')$$

$$x_m = \frac{1}{g} v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \quad (8')$$

$$y_m \rightarrow \frac{c}{g} v_0 \sin \alpha_0 - \frac{c^2}{g} \left(\frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2c^2} \right) = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha_0. \quad (9')$$

$$y \rightarrow x \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{cx}{v_0 \cos \alpha_0} + \frac{c^2}{g} \left(-\frac{gx}{cv_0 \cos \alpha_0} - \frac{g^2 x^2}{2c^2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \right) = \\ = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \quad (10')$$

Traectoria este o parabolă (care n-are asimptotă). Am regăsit astfel rezultatele cunoscute de la aruncarea în vid.

Cîmpul gravitațional

• 1.2.252. Considerăm două elemente identice de masă dm fiecare, situate diametral opus, ca în figură. Descompunem cîmpul produs de fiecare element într-o componentă axială $d\Gamma$ și o componentă radială. Observăm că cele două componente radiale se distruge totdeauna două câte două, pentru oricare pereche de elemente identice situate diametral opus, astfel încît trebuie să sumăm doar componentele axiale pentru a obține cîmpul total care va fi deci axial :

$$d\Gamma = -\gamma \frac{dm}{r^2} \cos \alpha = -\gamma \frac{dm y}{(R^2 + y^2)^{3/2}},$$

de unde prin integrare pe întregul inel :

$$\Gamma = \int d\Gamma = -\gamma \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \int dm = -\gamma \frac{my}{(R^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Valoarea maximă a cîmpului $\Gamma(y)$ este acolo unde derivata $\Gamma'(y) = 0$:

$$\Gamma'(y) = -\gamma m \frac{(R^2 + y^2)^{3/2} - y \frac{3}{2} (R^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(R^2 + y^2)^3} = 0,$$

ceea ce dă

$$y_m = \pm R/\sqrt{2}$$

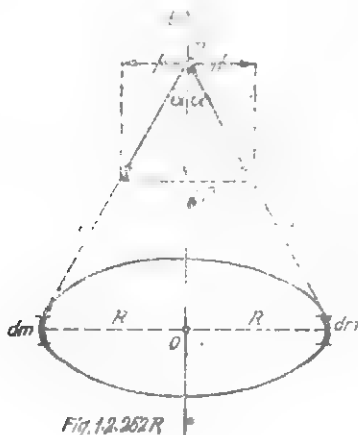


Fig. 1.2.252R

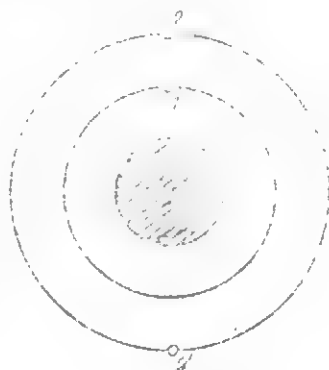


Fig. 1.2.253R

și deci cimpul maxim va fi $\Gamma(y_m)$:

$$\Gamma_{\max} = \mp \frac{2\gamma m}{3R^2\sqrt{3}}. \quad (3)$$

1.2.253. $h \cong (g_F - g_B) R / (2g_F) = 16 \text{ km.}$

1.2.254. $h \cong 3\pi R / (2\gamma \rho T^2) = 11 \text{ km.}$

1.2.255. $\rho = 3g_0 / (4\pi R \gamma) = 5,5 \text{ g/cm}^3.$

1.2.256. $\rho = 3\pi n : [(n-1) \gamma T^2] = 3,14 \text{ g/cm}^3.$

1.2.257. $v = v_I / \sqrt{n}.$

1.2.258. $T = 2\pi r \sqrt{r / (\gamma M)} = 1 \text{ h } 27 \text{ min.}$

1.2.259. $T = \sqrt{3\pi / (\gamma \rho)} = 1,2 \text{ ms.}$

1.2.260. $\rho = 24\pi / (\gamma T^2 \alpha^3) \sim 10^3 \text{ kg/m}^3.$

1.2.261. $t = 2\pi : [\sqrt{g_0 R^2 / r^3} - 2\pi / T] = 10,5 \text{ h.}$

1.2.262. $r/R = \sqrt[3]{n^3 : (n \pm 1)^2 \cdot \sqrt[3]{g_0 T_0^2 : (4\pi^2 R)}}; \frac{r_2}{R} = \sqrt[3]{g_0 T_0^2 / (4\pi^2 R)} = 6,56, (n \rightarrow \infty).$

1.2.263. $[(T_2/T_1)^{2/3} + 1] : [(T_2/T_1)^{2/3} - 1] = 4,4.$

1.2.264. $\omega = \sqrt{\gamma(m_1 + m_2) / R^3} = 9,82 \cdot 10^{-10} \text{ rad/s, } T = 2\pi / \omega = 32 \text{ ani } 97 \text{ zile;}$

$v_{1,2} = m_{2,1} \sqrt{\gamma : [R(m_1 + m_2)]} = 1,93 \text{ km/s, resp. } 3,86 \text{ km/s.}$

1.2.265. $v_J = (2\pi r / T) \sqrt{r / R_J} = 39 \text{ km/s.}$

1.2.266. $g_S = 4\pi^2 R : \left\{ \frac{T^2 \sin^2 \alpha}{2} \right\} = 270 \text{ m/s}^2.$

1.2.267. $T = \sqrt{3\pi / (\gamma \rho)} = 1 \text{ h } 24 \text{ min.}$

1.2.268. $T = (2\pi R \cdot R_0) \sqrt{R \cdot g_0} = 27,1 \text{ zile.}$

1.2.269. $m_2 = 4\pi^2 R^3 / (\gamma T^2) = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$

1.2.270. $T \cong 3mg_0 (l/R) \left(1 - \frac{3h}{R} \right) M : (M + m) = 21 \text{ mN.}$

1.2.271. $h = 2 \sqrt[3]{g R^2 \pi^2} = 2R = 23200 \text{ km.}$

* 1.2.272. Conform legii a III-a a lui *Kepler*, pătratul perioadei de revoluție a unui satelit (respectiv, planetei în cazul sistemului solar) este proporțional cu cubul semiaxei mari a traiectoriei eliptice a satelitului: $T^2 = ka^3$. În cazul nostru: $T^2 = kR^3$. Prin logaritmurile și apoi diferențierea acestei relații (derivata logaritmică), obținem:

$$2 \frac{dT}{T} = 3 \frac{dR}{R}.$$

Pe de altă parte, $T = 2\pi / \omega$ care, la fel, prin derivare logaritmică dă

$$\frac{dT}{T} = - \frac{d\omega}{\omega}.$$

Ținând seama că $v_r = \frac{dR}{dt}$, găsim accelerația unghiulară

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = - \frac{\omega}{T} \frac{dT}{dt} = - \frac{3}{2} \frac{\omega}{R} \frac{dR}{dt} \\ &= - \frac{3}{2} \frac{\omega}{R} \cdot v_r = -1,0 \cdot 10^{-23} \text{ rad/s}^2. \end{aligned}$$

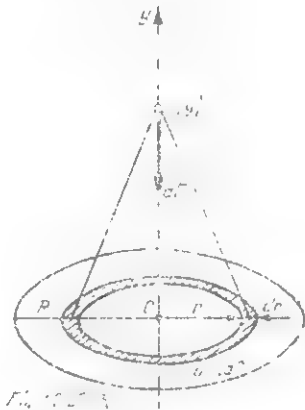
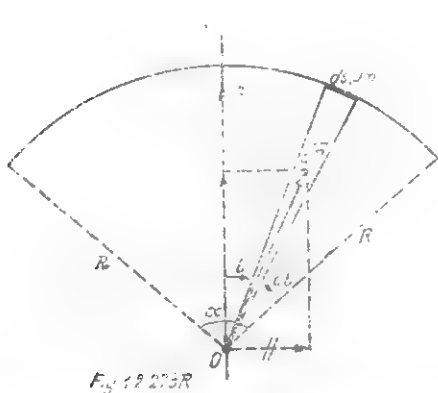
**** 1.2.273.** Datorită simetriei cîmpul resultant va fi pe direcția Oy . Luăm un element de masă dm care produce un cîmp radial $d\Gamma = -\gamma dm/R^2$. Componenta transversală $d\Gamma \cdot \sin\theta$ se va distruge cu cea transversală a elementului identic așezat simetric față de Oy , astfel încît rămîn numai componentele $d\Gamma \cdot \cos\theta$:

$$\Gamma = \int d\Gamma \cos\theta = - \int \gamma \frac{dm}{R^2} \cos\theta, \text{ dar } \frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{\alpha}, \quad (1)$$

$$\Gamma = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \gamma \frac{m}{R^2} \cos\theta d\theta = - 2 \frac{\gamma m}{R^2 \alpha} \int_0^{\alpha/2} \cos\theta d\theta = - 2\gamma \frac{m}{R^2 \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

În particular, pentru un semicerc

$$\alpha = \pi; \Gamma = - 2\gamma \frac{m}{\pi R^2}, \quad (3)$$



**** 1.2.274.** Vom folosi rezultatul problemei 1.2.252. Alegem un inel elementar de rază r , de grosime dr și de masă dm . Cîmpul creat în punctul $P(y)$ este

$$d\Gamma = - \gamma \frac{y dm}{(r^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Aria dS a inelului se poate calcula în 3 moduri: a) este aria unei fișii de lungime $2\pi r$ și lățime infinitesimală dr :

$$dS = 2\pi r dr, \quad (2)$$

b) este creșterea infinitesimală a ariei cercului πr^2 datorită creșterii infinitesimale a razei cu dr , deci este diferențiala:

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr,$$

c) este diferența dintre ariile cercurilor de rază $r + dr$ și raza r :

$$dS = \pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi (dr)^2 \rightarrow 2\pi r dr,$$

întrucît $(dr)^2$ este un indubit mic de ordin superior și dispare la limită față de primul termen.

Acum putem exprima masa dm :

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} dS = \frac{2m r dr}{R^2}, \quad (3)$$

Acum integrăm (1):

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int_0^R -\gamma y \frac{2\pi r dr}{R^2(r^2 + y^2)^{3/2}} = -\gamma \frac{m y}{R^2} \left[\frac{-2}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R = -\frac{2\gamma m}{R^2} \left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right]. \quad (4)$$

Oind traversăm discul trecind prin centrul său intensitatea cimpului gravitațional are un *salt*:

$$\Gamma_+ = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{-2\gamma m}{R^2} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] = -\frac{2\gamma m}{R^2}, \quad (5)$$

$$\Gamma_- = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{-2\gamma m}{R^2} \left[-1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right] = +\frac{2\gamma m}{R^2}.$$

Pentru a obține cimpul unui plan infinit înlocuim întâi în (4) $m = \sigma \pi R^2$ și apoi trecem la limita $R \rightarrow \infty$:

$$\Gamma = -2\pi\gamma\sigma \frac{y}{|y|} = \mp 2\pi\gamma\sigma, \quad (6)$$

cimpul este perpendicular pe plan, spre plan, și este constant. Acest rezultat se poate obține elegant cu ajutorul teoremei lui Gauss. Dacă formăm un „condensator” din două plane identice, paralele și infinite, cimpul între plane va fi zero, iar în exterior va fi dublul lui (6).

** 1.2.275. Luăm un element dm de lungime dy la distanța y de centrul firului. Cimpul produs de acest element se descompune într-o componentă normală $d\Gamma \cos\theta$ și una longitudinală $d\Gamma \sin\theta$. Aceasta din urmă se va distruge cu componenta similară produsă de un element de masă identic simetric de cealaltă parte a medietoarei. Rămâne să însumăm componentele normale:

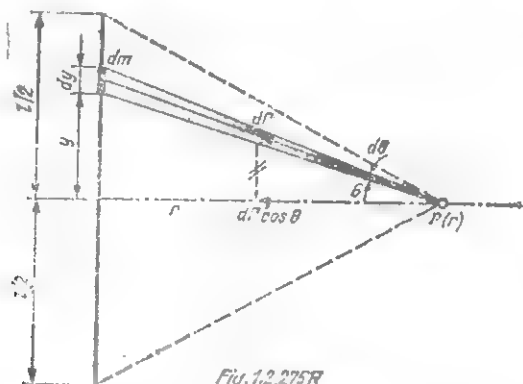


Fig. 1.2.275R

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int d\Gamma \cos\theta = - \int \gamma \frac{dm}{r^2 + y^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}}, \text{ dar } dm = \frac{m}{l} dy, \\ \Gamma &= -\gamma r \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{(r^2 + y^2)^{3/2}} = -2\gamma m \frac{r}{l} \int_0^{l/2} \frac{dy}{(r^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= -2\gamma m \frac{r}{l} \left[\frac{y}{r^2 \sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^{l/2} = -\gamma \frac{m}{r} \frac{1}{\sqrt{l^2/4 + r^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Pentru a obține cîmpul unui fir infinit, înlocuim întii masa m cu λl și apoi trecem la limita $l \rightarrow \infty$.

$$\Gamma = -\gamma \frac{\lambda l}{r} \frac{1}{\sqrt{l^2/4 + r^2}} \rightarrow -2\gamma \frac{\lambda}{r}, \quad (2)$$

rezultatul se putea obține elegant cu ajutorul teoremei lui Gauss. Cîmpul scade doar invers proporțional cu puterea întâia a distanței r .

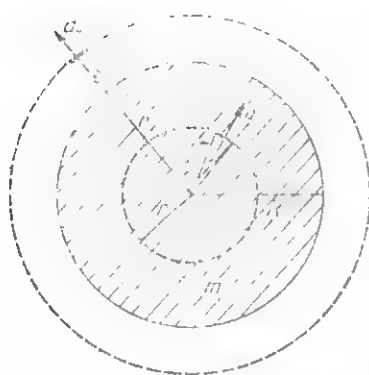
**** 1.2.276.** Vom aplica teorema lui Gauss : fluxul cîmpului gravitațional printr-o suprafață închisă este proporțional cu masa conținută în interiorul suprafeței :

$$\Phi = \oint_S \vec{\Gamma} d\vec{S} = -4\pi\gamma m_{\text{int}}, \quad (1)$$

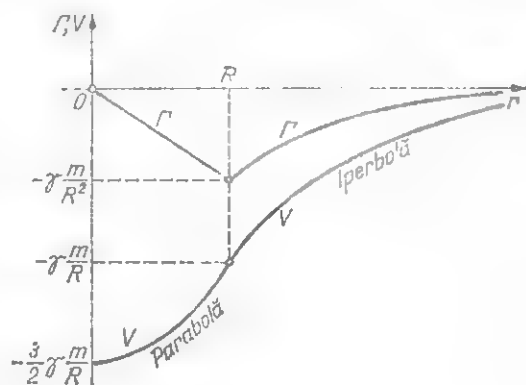
unde γ este constanta gravitațională (cerculețul la integrală înseamnă suprafață închisă).

Alegem o suprafață sferică concentrică, în exteriorul sferei date. În virtutea simetriei sferice $\vec{\Gamma}$ este radial și depinde numai de distanța r pînă la centrul sferei, deaceia fluxul prin această suprafață (gaussiană) se calculează imediat :

$$\Phi = \oint_S \vec{\Gamma} d\vec{S} = \oint_S \Gamma dS = \Gamma \oint_S dS = \Gamma(r) S = \Gamma \cdot 4\pi r^2,$$



a



b

Fig. 12.276R

și conform teoremei lui Gauss :

$$\Phi = \Gamma 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m, \quad \Gamma = -\gamma \frac{m}{r^2}, \quad r \geq R, \quad (2)$$

adică la fel, ca și cum masa sferei ar fi concentrată în centrul sferei. Semnul minus arată caracterul atractiv al cîmpului : $\vec{\Gamma}$ este orientat spre centrul sferei, în sens opus razei vectoriale.

Analog, luînd o suprafață sferică gaussiană în interiorul sferei date, găsim

$$\Phi = \Gamma(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m_{\text{int}} = -4\pi\gamma m \frac{r^3}{R^3},$$

$$\Gamma = -\gamma \frac{m}{R^3} r, \quad r \leq R. \quad (3)$$

Potențialul se obține conform definiției sale (considerăm potențialul zero la infinit):

a) În exteriorul sferei date:

$$V = - \int_{\infty}^r \vec{\Gamma} d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \Gamma dr = - \int_{\infty}^r \gamma \frac{m}{r^2} dr = - \gamma \frac{m}{r} \Big|_{\infty}^r = - \gamma \frac{m}{r}, \quad r \geq R, \quad (4)$$

ca și cum masa ar fi concentrată în centrul sferei.

b) În interiorul sferei date:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^r \vec{\Gamma} d\vec{r} = - \int_{\infty}^R \Gamma dr - \int_R^r \Gamma dr = \int_{\infty}^R \gamma \frac{m}{r^2} dr + \int_R^r \gamma \frac{m}{R^3} r dr = \\ &= - \gamma \frac{m}{r} \Big|_{\infty}^R + \frac{1}{2} \gamma \frac{m}{R^3} r^2 \Big|_R^r = - \frac{3}{2} \gamma \frac{m}{R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right), \quad r \leq R. \end{aligned} \quad (5)$$

În centrul sferei câmpul este nul, iar potențialul:

$$V_0 = - \frac{2}{3} \gamma \frac{m}{R}, \quad r = 0. \quad (6)$$

Vd. figura.

** 1.2.277. a) Legea conservării energiei ne dă:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} &= \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r}, \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}, \\ v^2 &= v_0^2 - 2g_0 R^2 (1/R - 1/r). \end{aligned} \quad (1)$$

Punînd condiția $v = 0$ găsim înălțimea maximă:

$$r_{\max} = 2g_0 R^2 : (2g_0 R - v_0^2), \quad h_{\max} = r_{\max} - R = R v_0^2 : (2g_0 R - v_0^2). \quad (2)$$

Atunci (2) se poate scrie:

$$r = \sqrt{2g_0 R^2 (1/r - 1/r_{\max})} = \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

Separăm variabilele:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2g_0 R^2 (1/r - 1/r_{\max})}}. \quad (4)$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} r &= x^2, \quad dr = 2x dx; \\ dt &= \sqrt{\frac{r_{\max}}{2g_0 R^2}} \frac{2x dx}{\sqrt{r_{\max} - x^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Integrăm prin părți:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{r_{\max} - x^2}} = - \int 2x d\sqrt{r_{\max} - x^2} = \\ &= - 2x \sqrt{r_{\max} - x^2} + 2 \int \sqrt{r_{\max} - x^2} dx. \end{aligned}$$

Dar

$$\int \sqrt{r_{\max} - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{r_{\max} - x^2} + r_{\max} \arcsin \frac{x}{\sqrt{r_{\max}}} \right].$$

Rezultă pînă la urmă :

$$I = \int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{r_{\max} - x^2}} = -x\sqrt{r_{\max} - x^2} + r_{\max} \arcsin \frac{x}{\sqrt{r_{\max}}} + C. \quad (6)$$

Acum integrăm ecuația (5) ($r = x^2$) :

$$t = \sqrt{\frac{r_{\max}}{2g_0 R^2}} \left[-\sqrt{r} \sqrt{r_{\max} - r} + r_{\max} \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_{\max}}} + C \right],$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $r = R$, astfel încît rezultă :

$$t = \sqrt{\frac{r_{\max}}{2g_0 R^2}} \left[\sqrt{R} \sqrt{r_{\max} - R} - \sqrt{r} \sqrt{r_{\max} - r} + r_{\max} \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_{\max}}} - r_{\max} \arcsin \sqrt{\frac{R}{r_{\max}}} \right]. \quad (7)$$

Timpul de urcare rezultă din condiția $r = r_{\max}$.

$$t_u = \sqrt{\frac{r_{\max}}{2g_0 R^2}} \left[\sqrt{R} \sqrt{r_{\max} - R} + \frac{\pi}{2} r_{\max} - r_{\max} \arcsin \sqrt{\frac{R}{r_{\max}}} \right].$$

Ținînd seama că pentru $x > 0$:

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin \sqrt{1 - x^2},$$

obținem :

$$t_u = \frac{R}{2g_0 R - v_0^2} \left[v_0 + \sqrt{2g_0 R - v_0^2} \arcsin \sqrt{\frac{v_0^2}{2g_0 R}} \right]. \quad (8)$$

b) Legea conservării energiei dă :

$$-\frac{mM}{R+h} = \frac{1}{2} m v'^2 - \gamma \frac{mM}{R}, \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2},$$

de unde

$$v' = \sqrt{2g_0 h R / (R+h)}. \quad (9)$$

Timpul de cădere este egal cu timpul de urcare (8); doar că trebuie să înlocuim acolo v_0 cu v' (9) și atunci obținem :

$$t_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+h}{2g_0}} \left[\sqrt{R h} + (R+h) \arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}} \right]. \quad (10)$$

1.3. Energia mecanică

1.3.1. $L = mgh + m\Delta v \langle v \rangle = 12,5 \text{ J}$.

1.3.2. $E/(m\tau) = (2gh)^{3/2} : (4l) = 71,3 \text{ W/kg}$.

1.3.3. $t_{\min} = 2 \sqrt{s/(g\mu)} = 40 \text{ s}$; $P_{\min} = \mu mg \sqrt{\mu g s} = 23 \text{ kW}$.

1.3.4. $d = v^2 (M - m)^2 / (2PM^2) = 970 \text{ m}$.

1.3.5. $\mu = m_2(h_1 + h_2) : [m_1(h_1 - h_2)] = 0,30$.

•• 1.3.6. Condiția de echilibru :

$$Mg + \frac{m}{l} (l - l_0) g - \mu \frac{m}{l} l_0 g = 0. \quad (1)$$

Fie la momentul t lanțul deplasat pe distanța x ca în figură atunci prin cipiul doi dă

$$Mg + \frac{m}{l} (l - l_0 + x)g - \mu \frac{m}{l} (l_0 - x)g = (m + M)a. \quad (2)$$

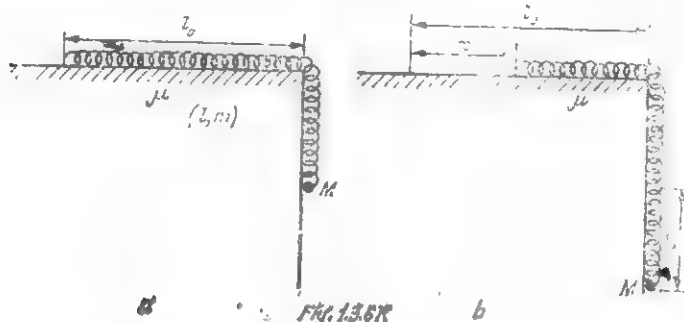


Fig. 136R

b

Înlocuind aici pe μ scos din (1) găsim :

$$a = g \frac{x}{l_0} \text{ sau } \frac{dv}{dt} = g \frac{x}{l_0}. \quad (3)$$

Acest rezultat simplu era de așteptat intrucit forța, deci accelerația, variază linear cu x și pentru $x = 0$ avem $F = 0 = a$, iar pentru $x = l_0$ (cînd lanțul părăsește masa) $a = g$ (cădere liberă).

Înmulțim ambii membri ai ecuației (3) cu $dx (= v dt)$:

$$\frac{dv}{dt} dx = g \frac{xdx}{l_0} \text{ sau } v dv = g \frac{xdx}{l_0}$$

și integrăm :

$$\int v dv = \int \frac{gxdx}{l_0} = \frac{g}{l_0} \int x dx, \quad \frac{1}{2} v^2 = \frac{g}{l_0} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială : pentru $x = 0$ avem $v = 0$, deci $C = 0$:

$$v^2 = \frac{g}{l_0} x^2, \quad v = \sqrt{\frac{g}{l_0}} \cdot x. \quad (4)$$

Cînd lanțul părăsește masa

$$x = l_0 \text{ și } v = \sqrt{gl_0}. \quad (5)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v v dv = \frac{g}{l_0} \int_0^x x dx \text{ sau } \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{l_0} x^2.$$

Viteza finală se poate obține imediat din formula generalizată a lui Galilei, care se deduce astfel :

$$\Delta E_c = L \text{ sau } \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int H_t ds = \int m a_t ds \text{ sau}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a_t ds \text{ sau } v^2 = v_0^2 + 2 \bar{a}_t^{(s_0, s)} \cdot (s - s_0), \quad (\text{Galilei}) \quad (6)$$

unde $\bar{a}_t^{(s_0, s)}$ este accelerația tangențială mediată pe intervalul (s_0, s) .

În cazul nostru $v_0 = 0$, accelerația variază linear cu coordonata și $\bar{a}^{(0), t_0} = -\frac{1}{2}(0 + g) = -\frac{g}{2}$,

astfel încît obținem imediat $v^2 = 2 \frac{g}{2} l_0$.

1.3.7. $\mu = h : (b + s) = 0,050$.

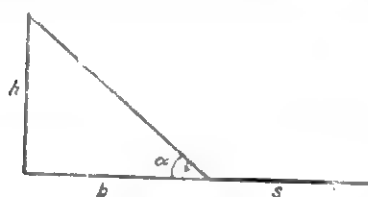


Fig. 13.7R

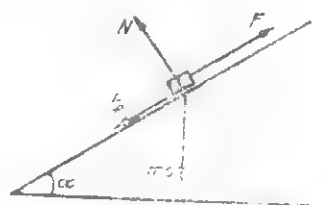


Fig. 13.8R

1.3.8. $\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha = 0,314$.

1.3.9. $P'(qp) = \sin(\alpha + \varphi) : \cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 27^\circ$.

1.3.10. $Q = Q_1 + Q_2$, $Q_1 = \mu mg \cos \alpha$, $\frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$,

$Q_2 = \mu mg \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left[t - \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \right]^2$,

$Q = 7,2 \text{ J}$.

1.3.11. $v_0 = \sqrt{2g(h + \mu d)} = 6,3 \text{ m/s}$, $v' = \sqrt{2g(h - \mu d)} = 0$.

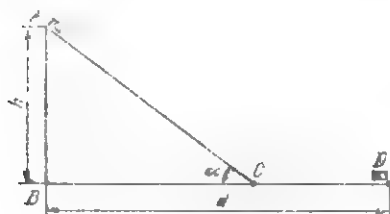


Fig. 13.11R

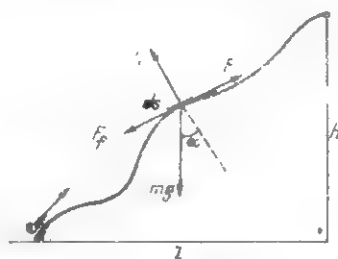


Fig. 13.12R

1.3.12. $-\Delta E = mgs \sin \alpha = \frac{1}{2} m v^2 = 5,9 \text{ J}$.

(**) 1.3.13. Deoarece viteza de deplasare este neglijabilă, avem pe direcția normală și tangențială la traiectorie:

$N - mg \cos \alpha = 0$, $F_t - F_f - mg \sin \alpha = 0$, $F_f = \mu N$, ($F = F_t$), (1)

astfel încît

$F_t = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha$, (2)

$L = \int F_t ds = \int mg \sin \alpha ds + \int \mu mg \cos \alpha ds$. (3)

Dar $ds \cos \alpha = dx$ și $ds \sin \alpha = dy$, (4)

astfel încît $L = mg \int_0^h dy = \mu mg \int_0^l dx = mgh + \mu mgl =$
 $= 784 \text{ J} + 196 \text{ J} = 980 \text{ J}.$ (5)

Primul termen reprezintă lucrul mecanic împotriva forței de greutate (creșterea energiei potențiale), iar al doilea — lucrul mecanic împotriva forței de frecare (căldura degajată prin frecare).

Rezultatul (5) se poate obține și fără integrale, judecînd cu deplasări foarte mici δy și sumînd lucrurile mecanice elementare:

$$\delta L = F \cdot \delta s = mg(\sin \alpha \delta s) + \mu mg(\cos \alpha \delta s) = mg \delta y + \mu mg \delta x, \quad (6)$$

$$L = \sum \delta L = \sum mg \delta y + \sum \mu mg \delta x =$$

$$= mg \sum \delta y + \mu mg \sum \delta x = mgh + mgl. \quad (7)$$

1.3.14. $P = 2mgv(h_1 - h_2)/d = 200 \text{ kW}.$

1.3.15. $\operatorname{tg} \alpha \cong P/(mgv) - \mu = 0,030 = 3,0 \text{ } \%$.

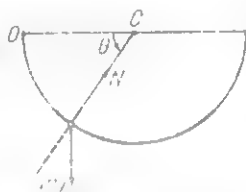
1.3.16. $P = 2mgv \sin \alpha \approx 2mgvp = 60 \text{ kW}.$

1.3.17. $v_0 = 2r_1 r_2 \cos \alpha : (r_1 + r_2) \cong 37,5 \text{ km/h}.$

1.3.18. $L = \frac{1}{2} mv_0^2 \mu : (\mu + \operatorname{tg} \alpha) = 0,10 \text{ J}.$



Fig. 13.18R



a

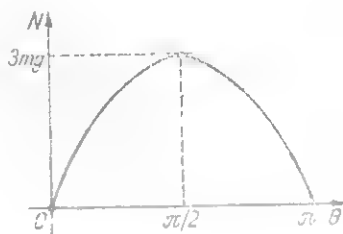


Fig. 13.21R

b

1.3.19. $E_x = E_0 \cos^2 \alpha_0 = 5,0 \text{ J}, E_y = E_0 \sin^2 \alpha_0 = 5,0 \text{ J}.$

1.3.20. $\cos \alpha = \sqrt{f} = 1/2, \alpha = 60^\circ.$

(*) 1.3.21. a) Bătăia realizată față de Pămînt

$$b = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$$

trebuie să fie mai mică decît lungimea scîndurii exact cu cît se deplasează scîndura înapoi în timpul cît pisica se află în aer:

$$b = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha = l - v'(t_u + t_c), \quad t_u + t_c = 2 \cdot \frac{1}{g} v_0 \sin \alpha, \quad (1)$$

iar viteza scîndurii v' rezultă din conservarea impulsului în procesul săriturii:

$$0 = mv_0 \cos \alpha - Mv'.$$

Rezultă astfel:

$$v_0 = \sqrt{lg : [(1 + m/M) \sin 2\alpha]}. \quad (2)$$

Viteza este minimă dacă $\sin 2\alpha = 1$, deci $\alpha = 45^\circ$, atînci

$$v_{0\min} = \sqrt{lg : (1 + m/M)} = 1,8 \text{ m/s}. \quad (3)$$

$$L = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} Mv'^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} M v_0^2 \cos^2 \alpha (m^2/M^2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M} \cos^2 \alpha \right) = \frac{1}{2} g l \frac{m M}{m + M} \left[\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{m}{M} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} g l \frac{m M}{m + M} \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \frac{m}{M} \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} g l \frac{m M}{m + M} \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg} \alpha + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

În paranteză mare avem suma a două mărimi variabile al căror produs este constant. Atunci suma este minimă când mărimile sînt egale:

$$\operatorname{tg} \alpha = (1 + m/M) : \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{1 + m/M} = \sqrt{3}, \quad \alpha_0 = 60^\circ. \quad (5)$$

Atunci

$$L_{\min} = \frac{1}{2} g l \frac{m M}{m + M} \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{2} m g l \sqrt{M/(m + M)} = 5,66 \text{ J}. \quad (6)$$

Altfel, cu ajutorul derivatelor:

$$L = \text{const.} [p + (1 + m/M)/p] = f(p), \text{ unde } p = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Condiția de extremum este anularea derivatei:

$$f'(p) = 0 = \text{const.} [1 - (1 + m/M)/p^2] = 0,$$

de unde

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1 + m/M}. \quad (8)$$

$$1.3.22. v = \sqrt{gl/2} = 10 \text{ m/s}.$$

$$1.3.23. F = 2E_c/R = 40 \text{ N}, P = 0, L = 0.$$

1.3.24. $N = 3mg \sin \theta$. Dacă corpul pleacă din repaus de la unghiul α , atunci $N = mg (3 \sin \theta - 2 \sin \alpha)$, $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$.

$$1.3.25. h = \frac{1}{3} (2H + R) = \frac{5}{3} R.$$

$$1.3.26. Q = mg(h - 5R/2) = 4,9 \text{ J}.$$

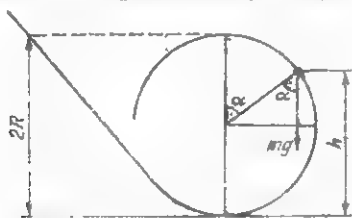


Fig. 1.3.25R

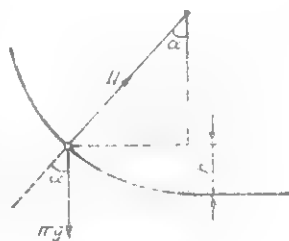


Fig. 1.3.26R

$$1.3.27. h = \frac{R}{3} (2\mu l/R - f + 1) = 2,7 \text{ m}.$$

$$1.3.28. T = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha), T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha), T_{\min} = mg\cos\alpha.$$



Fig. 1.3.28R



Fig. 1.3.28R

$$1.3.29. \cos \theta = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \alpha) = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ.$$

$$1.3.30. T_m = mg [1 - v_m^2 / (2gl)] = 0,44 \text{ N}.$$

$$1.3.31. N = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \alpha), \quad N_{\max} = mg(3 - 2 \cos \alpha) = 1,92 \text{ mg},$$

$$\alpha = 1 \text{ rad}.$$

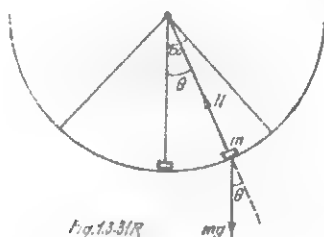


Fig. 1.3-31/R

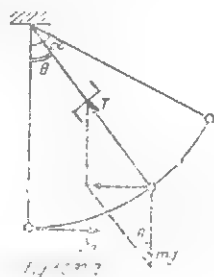


Fig. 1.3-32/R

$$1.3.32. \cos \alpha = \frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1/\cos \theta) = 0,73, \quad \alpha = 43^\circ.$$

$$1.3.33. T = 6mg.$$

$$1.3.34. \text{a) fir: } v_0 = \sqrt{5gl}, \quad T_{\max} = 6mg; \text{ b) tijă: } v_0 = \sqrt{4gl}, \quad T_{\max} = 5mg, \quad T = 0; \quad h = 5l/3, \quad \sin \theta = 2/3.$$

$$1.3.35. v = 2 \sqrt{gl} \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \pi / \left(8 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] = -1,6 \text{ m/s, în jos}.$$

(*) 1.3.36. Să arătăm întâi că energia totală a unui satelit în câmpul gravitațional al planetei este egală cu jumătate din energia sa potențială. Din legea mișcării:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (1)$$

rezultă $\frac{1}{2} mv^2 = E_c = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2} E_p$, deci $E =$

$$= E_c + E_p = \frac{1}{2} E_p. \quad (2)$$

Deoarece $\Delta h = h_2 - h_1$ este mic îl putem calcula aproximativ ca diferențială dh și anume:

$$dE = \frac{1}{2} dE_p = \frac{1}{2} \left(\gamma m M \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{1}{2} m \gamma \frac{M}{(R+h)^2} dh, \quad (3)$$

deci $\Delta E = \frac{1}{2} mg_h \Delta h, \quad \Delta E_c = mg_h \Delta h, \quad (4)$

unde g_h este accelerația gravitațională la altitudinea h . Variația ΔE_c la altitudinea h se putea scrie imediat prin judecată elementară. Pe de altă parte, variația energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forțelor neconservative, deci căldura degajată:

$$Q = -L_{\text{necons.}} = -\frac{1}{2} mg_h (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} mg_h (h_1 - h_2). \quad (5)$$

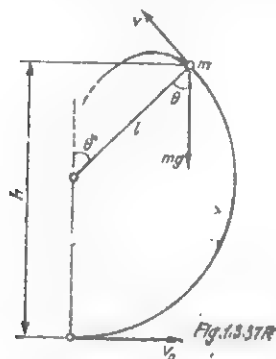
Deoarece $h \ll R$ putem aproxima pe g_h :

$$g_h = \gamma M : (R+h)^2 = \gamma \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1+h/R)^2} \cong g_0 (1 - 2h/R), \quad (6)$$

astfel încît

$$Q = \frac{1}{2} m g_0 (1 - 2h/R) (h_1 - h_2) - 9,5 \text{ MJ} = 2,64 \text{ kWh.} \quad (7)$$

$$1.3.37. h = (v_0^2 + gl)/(3g) = 1,56 \text{ m}; v = \sqrt{(v_0^2 - 2gl)/3} = 2,34 \text{ m/s.}$$



$$1.3.38. T = mg[v_0/(gl) + 3 - 2 \cos \alpha] = 4,0 \text{ N.}$$

$$1.3.39. v_2 = r_2 \sqrt{2g(m_2 r_2 - m_1 r_1) : (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} = 2,7 \text{ m/s.}$$

$$1.3.40. \omega = \sqrt{2g(m_1 l_1 - m_2 l_2) : (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} = 2,8 \text{ rad/s}$$

$$1.3.41. \omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g(m_1 l_1 + m_2 l_2) : (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} = 4,04 \text{ rad/s.}$$

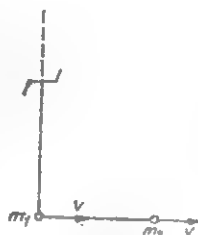
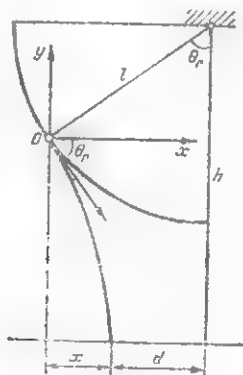
$$1.3.42. \omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g(R - r) : (R^2 + r^2)} = 4,45 \text{ rad/s.}$$

$$1.3.43. N_s = mg \cos \alpha (3 \sin \alpha - 2), \text{ dac\u0103 } \sin \alpha > 2/3, \text{ altfel } N_s = 0.$$

$$1.3.44. T_{\max} = mg + v \sqrt{kn} = 29,8 \text{ N.}$$

$$1.3.45. \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{F}{mg} \right) \left(1 + \frac{F}{kl} \right) = 0,623, \alpha = 51^\circ 26'.$$

$$1.3.46. T_r = mg \cdot 3 \cos \theta_r, \theta_r = 60^\circ; -(h - l \cos \theta_r) = x \tan(-\theta_r) - \frac{g x^2}{2 \cdot 2gl \cos \theta_r \cos \theta_r}, x = 3 - \sqrt{3}, d = l \sin \theta_r - x = 2\sqrt{3} - 3 = 0,46 \text{ m.}$$



$$1.3.47. T = m_2 g + m_2 g \cdot 2l_2(m_1 l_1 + m_2 l_2) (1 - \cos \alpha) : (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) = 3,92 \text{ N} + 4,99 \text{ N.}$$

$$1.3.48. v_0 = \sqrt{2gl(1 + m_2/m_1)} = 2,4 \text{ m/s.}$$

1.3.49. $T_1 = m_1 g (m_2 - 3m_1) : (m_1 + m_2) = -0,59 \text{ N}$; $T_2 = m_2 g (3m_2 - m_1) : (m_1 + m_2) = 12,4 \text{ N}$.

1.3.50. $\cos \theta = \cos \alpha - 2v_0^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} : (gl \cos \alpha)$, a) $\cos \theta = 0,994$, $\theta = 6^\circ 10'$, b) $\cos \theta = 0,760$, $\theta = 40^\circ 32'$.

1.3.51. $\frac{M}{m} \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 2 = 0$, $\alpha = 30^\circ$, $u = \sqrt{gl(2 - 3 \sin \alpha)m/M} = 1,1 \text{ m/s}$.

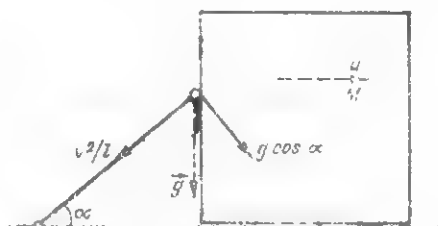
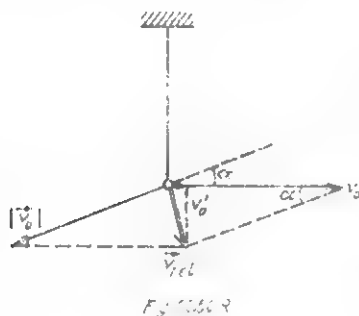


Fig. 1.3.51R

1.3.52. a) $\cos \alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha = 48^\circ 11'$, $r_0 = \sqrt{2gR/3}$, $x_0 = \sqrt{5} R/3 = 0,75 R$, $y_0 = 2R/3 = 0,67 R < x_0$; b) $\cos \beta = 2\sqrt{3}/9 = 0,385$, $\beta = 67^\circ 22'$; c) $h = 23R/27 = 0,85 R$.

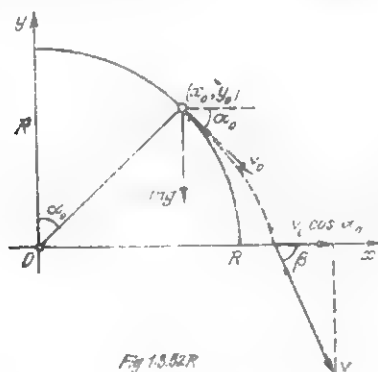


Fig. 1.3.52R

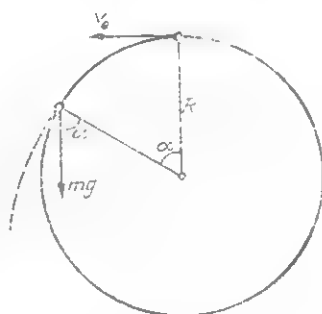


Fig. 1.3.52R

1.3.53. $\cos \alpha = (v_0^2 + 2Rg)/(3Rg)$, dacă $v_0 > \sqrt{Rg}$, corpul cade liber și revine la $h = 2R$. Altfel:

$$h = 50 R/27 + 5r_0^2/(18g) - v_0^4/(9 Rg^2) - r_0^6/(54 R^2g^3).$$

1.3.54. Corpul m_1 va oscila: $a = g \sqrt{(\mu m_2/m_1 + 2)^2/9 - 1} = \frac{4}{3} g$.

Fără oscilațiile lui m_1 ar fi: $a = g \sqrt{(\mu m_2/m_1)^2 - 1} = 2\sqrt{2} g$.

1.3.55. $\cos \alpha = \frac{1}{2} [3 - m_2 l_2 / (m_1 l_1)] = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$.

$$1.3.56. x = 5(\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) R/27 = 1,46 R.$$

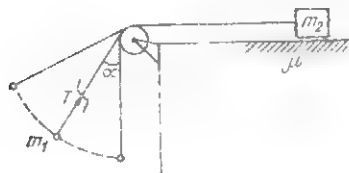


Fig. 1.3.54R

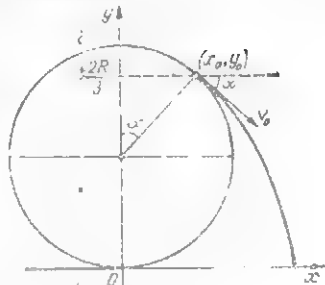


Fig. 1.3.56R

$$1.3.57. \cos \beta = 2\sqrt{3}/9 = 0,385, \beta = 67^\circ 20'.$$

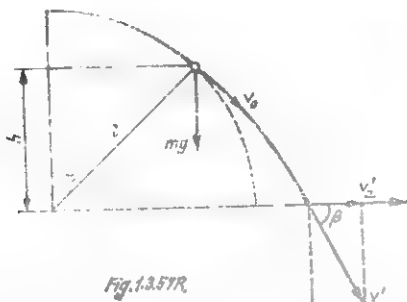


Fig. 1.3.57R



Fig. 1.3.58aR

$$1.3.58. W = \frac{1}{2} k_2 s^2 (1 + k_2/k_1) = 3,00 \text{ J}.$$

$$1.3.59. W = F^2 m_2^2 / [2k (m_1 + m_2)^2] = 0,10 \text{ J}.$$

$$1.3.60. v_0 = \sqrt{2E_2(k_1 + k_2)/(mk_1)} = 6,0 \text{ m/s}.$$

$$1.3.61. v = \mu g \sqrt{15} \text{ m/s} = 1,0 \text{ m/s}.$$

$$1.3.62. h = Mg [1 + M/(2m)] / (2k) = 2,94 \text{ m}.$$

$$1.3.63. F_{\max}/(mg) = 2(1 + H/h) = 26.$$

$$1.3.64. F = mg + v \sqrt{k m} = 320 \text{ kN}.$$

$$1.3.65. S = F^2 / (2k) + F s \cos \alpha = 21 \text{ J}.$$

$$1.3.66. Q = F_f [l_0 + F_f / (2k)] = 11 \text{ J}.$$

$$** 1.3.67. mg \sin \alpha - bx - mg \cos \alpha = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Pentru a separa variabilele înmulțim ecuația cu $dx = v dt$:

$$mg(\sin \alpha - bx \cos \alpha) dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dv.$$

Integrăm:

$$\begin{aligned} \int mg(\sin \alpha - bx \cos \alpha) dx &= mgx \sin \alpha - \frac{1}{2} mgbx^2 \cos \alpha = \\ &= \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2 + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$; rezultă $C = 0$,

$$mgx \sin \alpha - \frac{1}{2} mgbx^2 \cos \alpha = \frac{1}{2} m v^2. \quad (2)$$

Dealtfel, aceasta nu este altceva decît teorema variației energiei cinetice :

$$L = \int_0^x mg(\sin \alpha - b x \cos \alpha) dx = mg \left(x \sin \alpha - \frac{1}{2} b x^2 \cos \alpha \right) = \\ = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (3)$$

Punem condiția de oprire $v = 0$ și obținem :

$$x_m = \frac{2 \sin \alpha}{b \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{b}. \quad (4)$$

Condiția de extremum pentru x este anularea derivatei : $\frac{dv}{dt} = 0$, ceea ce în virtutea ecuației fundamentale (1) dă imediat :

$$x = \frac{\sin \alpha}{b \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{b}. \quad (5)$$

Întroducînd această valoare în (3) găsim

$$v_{\max} = \sin \alpha \sqrt{g/(b \cos \alpha)}. \quad (6)$$

** 1.3.68. a) Pe direcția radială, centripet, lex secunda dă :

$$T - mg \cos \theta = m a_c = m v^2/l. \quad (1)$$

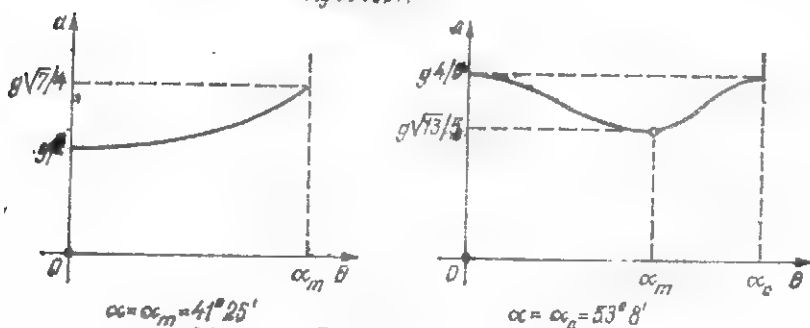
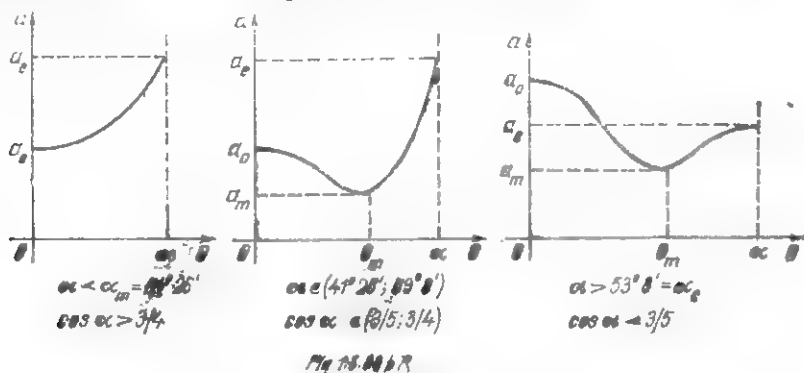
Pe de altă parte, conservarea energiei cinetice și potențiale dă :

$$mg(l - l \cos \alpha) = mg(l - l \cos \theta) + \frac{1}{2} m v^2. \quad (2)$$

Eliminînd pe $m v^2$ din cele două ecuații obținem

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \alpha). \quad (3)$$

Tensiunea este maximă cînd $\cos \theta = 1$, $\theta = 0^\circ$, cînd firul trece prin poziția verticală : $T_{\max} = mg(3 - 2 \cos \alpha). \quad (4)$



b) Pe direcția tangențială lex secunda dă :

$$-mg \sin \theta = ma_t = m \frac{dr}{dt} = m \frac{d(\omega l)}{dt} = ml \frac{d\omega}{dt} = ml \epsilon. \quad (5)$$

Pentru a putea integra înmulțim ecuația cu $d\theta = \omega dt$:

$$-mg \sin \theta d\theta = ml \frac{d\omega}{dt} d\theta = ml \omega d\omega, \quad (d\theta/dt = \omega).$$

Integrăm :

$$-mg \int \sin \theta d\theta - mg \cos \theta = ml \int \omega d\omega = \frac{1}{2} ml \omega^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

la $t = 0$ avem $\theta = \alpha$, $r = 0 = \omega l$, $\omega = 0$: $mg \cos \alpha = C$,

$$mg(\cos \theta - \cos \alpha) = \frac{1}{2} ml \omega^2. \quad (6)$$

Aceasta este de fapt legea conservării energiei scrisă sub forma „unghiulară” :

$$mgh = mg(l \cos \theta - l \cos \alpha) = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2,$$

$I = ml^2$ este momentul de inerție al bilei față de axa de oscilație.

$$\omega^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) \quad (7)$$

și din (5)

$$\epsilon = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (8)$$

Accelerația

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(\omega^2 l)^2 + (\epsilon l)^2} = l \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2} = g \sqrt{4(\cos \theta - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

c) Valorile extreme corespund anulării derivatei :

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{1}{a} g^2 \sin \theta (4 \cos \alpha - 3 \cos \theta) = 0, \quad (10)$$

de unde rezultă rădăcinile derivatei :

$$\cos \theta_m = \frac{4}{3} \cos \alpha \text{ posibil dacă } \cos \alpha < \frac{3}{4}, \quad \alpha > 41^\circ 25',$$

$$a_{\min} = g \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}; \quad (11)$$

$$\sin \theta = 0, \quad a_0 = 2g(1 - \cos \alpha). \quad (12)$$

Cînd trecem prin rădăcina (11) semnul derivatei trece de la minus la plus, deci avem un *minim* (dacă $\cos \alpha < \frac{3}{4}$, $\alpha > 41^\circ 25'$). Cînd trecem

prin rădăcina (12) semnul derivatei trece de la $-$ la $+$ dacă $\cos \alpha > 3/4$, $\alpha < 41^\circ 25'$, deci avem un *minim* în acest caz, altfel avem un *maxim*.

La extremități :

$$a_t = g \sin \alpha, \quad (\theta = \pm \alpha). \quad (13)$$

Raportul accelerațiilor :

$$\frac{a_0}{a_t} = \frac{2g(1 - \cos \alpha)}{g \sin \alpha} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (14)$$

Ele se egalează pentru :

$$a_0 = a_e \text{ pentru } \alpha_e = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 53^\circ 8',$$

$$\text{pentru } \alpha \leq \alpha_e \text{ avem } a_0 \leq a_e.$$

(15)

Cazuri particulare :

$$\alpha = \alpha_m = 41^\circ 25' \left(\cos \alpha_m = \frac{3}{4} \right) : a_0 = g/2 = 0,50 \text{ g},$$

$$a_e = g\sqrt{7}/4 = 0,66 \text{ g};$$

(16)

$$\alpha = \alpha_e = 53^\circ 8' \left(\cos \alpha_e = \frac{3}{5} \right) : a_0 = a_e = 4g/5 = 0,80 \text{ g}$$

$$a_m = g\sqrt{13}/5 = 0,72g.$$

(17)

Comparați cu rezolvarea problemei 1.2.213.

** 1.3.69. Imediat ce se lasă lanțul liber punctele sale au $r \rightarrow 0$, deci au numai accelerație tangențială a_t . Considerăm întâi cazul $l < \pi R/2$.

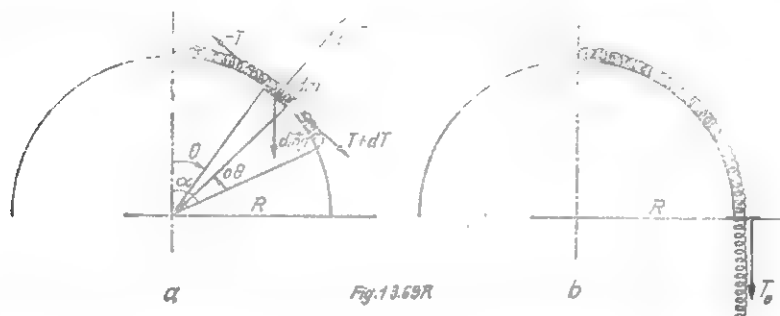


Fig. 1.3.69

Luăm un element de masă dm care subîntinde unghiul elementar $d\theta$. Notăm cu λ densitatea liniară a lanțului : $\lambda = m/l$. Asupra elementului dm acționează forțele din figură (T — tensiunea din lanț) :

$$dm \vec{g} + d\vec{N} + d\vec{T} = dm \vec{a}_t. \quad (1)$$

Proiectăm această ecuație pe direcția tangențială :

$$dm g \sin \theta + dT = dm a_t, \quad dm = \lambda ds = \lambda R d\theta \quad (2)$$

și integrăm (sumăm) pe tot lanțul, observînd că $a_t = \text{const}$ (același pentru toate elementele lanțului) :

$$\int \lambda R d\theta g \sin \theta + \int dT = \int dm a_t, \quad \lambda R g \int_0^\alpha \sin \theta d\theta + T \Big|_0^\alpha = a_t \int_0^\alpha dm = m a_t,$$

$$\lambda R g (1 - \cos \alpha) = m a_t, \text{ dar } \alpha = l/R,$$

(3)

(tensiunea în secțiunile de la capetele lanțului este zero),

$$a_t = g \frac{R}{l} \left(1 - \cos \frac{l}{R} \right); \quad l \leq \pi R/2.$$

(4)

La limită pentru $l = \pi R/2$:

$$a_t = 2g/\pi = 0,64 \text{ g}.$$

(5)

(observăm că a_t este media lui $g \sin \theta$ pe un sfert de cerc).

Oazul $l > \pi R/2$. Integrăm ecuația (3) între limitele (0, $\pi/2$):

$$\lambda R g \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta + T \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \lambda R \frac{\pi}{2} a_i \text{ sau } \lambda R g + T_0 = \lambda R \frac{\pi}{2} a_i, \quad (6)$$

unde am notat cu T_0 tensiunea în secțiunea $\theta = \pi/2$. Pentru a o afla scriem lex secunda pentru porțiunea de lanț adîncată:

$$\lambda(l - \pi R/2)g - T_0 = \lambda(l - \pi R/2)a_i, \quad T_0 = \lambda(l - \pi R/2)(g - a_i), \quad (7)$$

astfel încît (6) dă:

$$a_i = g \left[1 - \frac{R}{l} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]. \quad (8)$$

La limită cînd $l = \pi R/2$ regăsim (5), iar cînd $l \gg \pi R/2$, $a_i \rightarrow g$.

* **1.3.70.** $E = \frac{1}{2} m v^2 = A s^2$, $v = s \cdot \sqrt{2A/m}$, (1)

$$a_i = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}} v = \frac{2A}{m} \cdot s, \quad (2)$$

$$F = ma = m \sqrt{v_i^2 - a_s^2} = m \sqrt{(2As/m)^2 + (v^2/R)^2} = 2As \sqrt{1 + s^2/R^2}. \quad (3)$$

** **1.3.71.** Lex secunda se scrie:

$$F = mg = ma \text{ sau } mg(1 - 2Ay) = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Pentru a putea integra înmulțim ecuația cu $dy = v dt$:

$$mg(1 - 2Ay) dy = m \frac{dv}{dt} dy = m v dv \quad (2)$$

și integrăm:

$$\int mg(1 - 2Ay) dy = mg(y - Ay^2) = \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $v = 0$ și $y = 0$, rezultă $C = 0$,

$$mg(y - Ay^2) = \frac{1}{2} m v^2. \quad (3)$$

Aceasta nu este altceva decît teorema variației energiei cinetice:

$$L = \Delta E, \quad L = \int_0^y mg(1 - 2Ay) dy = mg(y - Ay^2) = \Delta E_0 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Punem condiția de oprire la înălțimea maximă $v = 0$:

$$mg(y - Ay^2) = 0, \quad y_{\max} = 1/A. \quad (4)$$

Lucrul mecanic cerut:

$$L = \int_0^y F dy = \int_0^y 2mg(1 - Ay) dy = 2mg \left(y - \frac{1}{2} Ay^2 \right). \quad (5)$$

Punind aici $y = y_{\max} = 1/A$, găsim :

$$L = mg/A. \quad (6)$$

* 1.3.72. a) $F = -\frac{dU}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}, \quad (1)$

$$F = 0 \text{ pentru } r_0 = 2a/b, \quad (2)$$

$$U_{\min} = U(r_0) = -b^2/(4a) < 0. \quad (3)$$

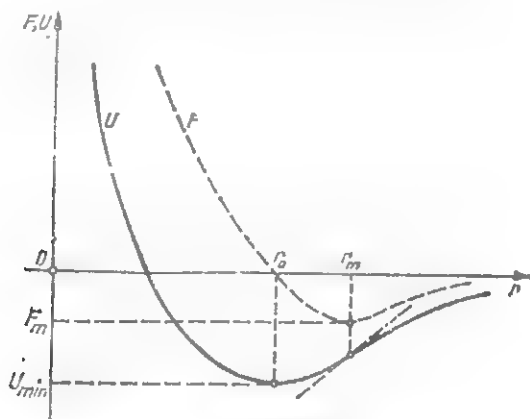


Fig.1.3.72R

b) Condiția de extremum pentru F este anularea derivatei :

$$\frac{dF}{dr} = -6a/r^4 + 2b/r^3 = 0, \quad r_m = 3a/b, \quad (4)$$

$$F_m = -b^3/(27a^2), \text{ (atractivă)}. \quad (5)$$

c) Vd. figura, în punctul r_m graficul lui U are un punct de inflexiune.

* 1.3.73. a) $a_n = At = v^2/R, \quad v = \sqrt{AR} \cdot \sqrt{t}, \quad (1)$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{AR} \frac{1}{2\sqrt{t}}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P = \vec{F} \cdot \vec{v} &= F_t v = ma_t v = m \sqrt{AR} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \sqrt{AR} \sqrt{t} = \\ &= \frac{1}{2} mAR = \text{const.} \end{aligned} \quad (3)$$

b) $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t v = ma_t v = m \frac{dv}{dt} v = P_0. \quad (4)$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\int m v dv = \frac{1}{2} m v^2 = \int P_0 dt = P_0 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$\frac{1}{2} m v^2 = P_0 t, \quad a_n = v^2/R = 2P_0 t/(mR). \quad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v m v dv = \frac{1}{2} m v^2 = \int_0^t P_0 dt = P_0 t.$$

Puterea (3) fiind constantă, lucrul mecanic efectuat este egal cu puterea ori timp și conform teoremei energiei cinetice :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 = P_0 t,$$

deci nu este necesar aici calculul integral.

** 1.3.74. — $\mu_2 m g \frac{x}{l} - \mu_1 m g \frac{l-x}{l} = m a = m \frac{dv}{dt},$

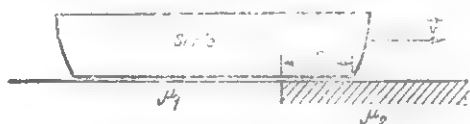


Fig. 13.74R

$$- (\mu_2 - \mu_1) m g \frac{x}{l} - \mu_1 m g = m \frac{dv}{dt}, \quad x \leq l. \quad (1)$$

$$- (\mu_2 - \mu_1) \frac{mg}{l} (x + x_0) = v \frac{dv}{dt}, \quad x_0 = l \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \quad (2)$$

sau

$$- k(x + x_0) = m \frac{d^2(x + x_0)}{dt^2}, \quad k = (\mu_2 - \mu_1) \frac{mg}{l}. \quad (3)$$

Aceasta este binecunoscuta ecuație diferențială a oscilatorului armonic cu soluția cunoscută :

$$x + x_0 = A \sin(\sqrt{k/m} \cdot t + \alpha), \quad (4)$$

$$v = \dot{x} = \sqrt{k/m} A \cos(\sqrt{k/m} \cdot t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g(\mu_2 - \mu_1)/l}, \quad (5)$$

unde constantele de integrare A , α se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = v_0$:

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad v_0 = \sqrt{k/m} A \cos \alpha = \omega A \cos \alpha,$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}, \quad \tan \alpha = \omega x_0/v_0; \quad (6)$$

rezultă

$$x = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} \sin(\omega t + \alpha) - x_0. \quad (7)$$

Distanța până la oprire se obține când sinusul este 1 :

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} - x_0 = \sqrt{l^2 \mu_1^2 : (\mu_2 - \mu_1)^2 + v_0^2 l : [g(\mu_2 - \mu_1)]} - l \mu_1 : (\mu_2 - \mu_1). \quad (8)$$

Acest rezultat este valabil dacă $x_m \leq l$, ceea ce dă condiția :

$$v_0^2 < 2lg(\mu_1 + \mu_2)/2 \text{ sau } l \geq v_0^2 : [g(\mu_1 + \mu_2)]. \quad (9)$$

Timpul până la oprire ($v = 0$) se obține din condiția :

$$\begin{aligned} \omega t + \alpha &= \pi/2; \quad t_m = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g(\mu_2 - \mu_1)}} \cdot \operatorname{arccotg} \frac{\mu_1}{v_0} \sqrt{\frac{gl}{\mu_2 - \mu_1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Propunem cititorului să regăsească din (8) și (10) prin trecere la limită $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ rezultatele cunoscute :

$$x_m = v_0^2/(2\mu g), \quad t_m = v_0/(\mu g).$$

Rezultatele de mai sus se pot obține direct din ecuația fundamentală (3) prin înmulțire cu $dx = v dt$ și integrare :

$$-k(x + x_0) dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dr,$$

$$-k \int (x + x_0) dx = -\frac{k}{2} (x + x_0)^2 = \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2 + C, \quad (11)$$

unde constanta de integrare se obține din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = v_0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} k x_0^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 + C, \quad -\frac{1}{2} k(x + x_0)^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Aceasta nu este altceva decât teorema variației energiei cinetice :

$$\begin{aligned} L = \int F dx &= \Delta E, \quad L = \int_0^x -k(x + x_0) dx = \\ &= -\frac{1}{2} k(x + x_0)^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \Delta E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned}$$

Punând condiția de oprire $v = 0$, obținem (8) :

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + m v_0^2 / k} - x_0.$$

Scotînd pe $x + x_0$ din (12) și introducînd în (3), găsim

$$-k \sqrt{x_0^2 + (v_0^2 - v^2) \frac{m}{k}} = m \frac{dv}{dt}, \quad \omega^2 = k/m.$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} \omega dt &= -\frac{dr}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r^2} - v^2}}, \\ \int \omega dt = \omega t &= \int \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r^2} - v^2}} = \arccos \sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r^2} - v^2} + C, \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$\begin{aligned} \omega t &= \arccos \sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r^2} - v^2} - \arccos \sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r_0^2} - v_0^2}, \\ r &= \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2} \cos \left(\omega t - \arccos \sqrt{\omega^2 x_0^2 + \frac{v_0^2}{r_0^2} - v_0^2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

ceea ce coincide cu (5), dacă ne amintim că

$$\arccos x = \arctg \sqrt{1 - x^2}, \text{ pentru } x \geq 0. \quad (14)$$

$$b) \quad Q^* = -F_r = k(x + x_0)r = kA \sin(\omega t + \alpha) \cdot \omega A \cos(\omega t + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \omega \sin(2\omega t + 2\alpha), \quad (15)$$

$$Q_{\max}^* = \frac{1}{2} k A^2 \omega = \frac{1}{2} m v_0^2 \sqrt{g(\mu_2 - \mu_1) l} \left[1 + \frac{g l \mu_1^2}{v_0^2 (\mu_2 - \mu_1)} \right] \quad (16)$$

(în acest caz sinusul și cosinusul sînt $1/\sqrt{2}$ și $x - x_0 = A/\sqrt{2}$, $v = \omega A/\sqrt{2}$). Rezultatul se poate obține și altfel, de exemplu scoatem r din (12) :

$$\begin{aligned} Q^* &= k(x + x_0) \sqrt{r_0^2 + \omega^2 x_0^2 - \omega^2 (x + x_0)^2} = \\ &= k\omega(x + x_0) \sqrt{A^2 - (x + x_0)^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Condiția de extremum este anularea derivatei :

$$\frac{dQ^*}{dx} = k\omega \frac{A^2 - 2(x + x_0)^2}{\sqrt{A^2 - (x + x_0)^2}} = 0 \Rightarrow x + x_0 = A/\sqrt{2}. \tag{18}$$

În sfîrșit se putea exprima Q^* în funcție de viteza (scoatem r din (12)) :

$$\begin{aligned} Q^* &= k(x + x_0) r = k \sqrt{x_0^2 + r_0^2 \omega^2 - r^2 \omega^2} \cdot r = k \sqrt{A^2 - r^2 \omega^2} \cdot r, \\ \frac{dQ^*}{dv} &= k \frac{A^2 - 2r^2 \omega^2}{\sqrt{A^2 - r^2 \omega^2}} = 0 \Rightarrow r = \omega A/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) Să considerăm acum cazul

$$r_0^2 > 2lg(l_1 + l_2)/2 \text{ sau } l < r_0 : (g(\mu_1 + \mu_2))^{1/2}. \tag{19}$$

În acest caz sania intră complet pe asfalt și forța de frecare devine constantă $F_f = -\mu_2 mg$. Viteza saniei în momentul cînd intră complet pe asfalt se obține din (12) punînd condiția $x = l$:

$$v'^2 = r_0^2 + \omega^2 x_0^2 - \omega^2 (l + x_0)^2 = \omega^2 [A^2 - (l + x_0)^2], \tag{20}$$

de unde distanța parcursă pînă la oprire :

$$s = l + v'^2/(2\mu_2 g). \tag{21}$$

Timpul în momentul intrării complete a saniei pe asfalt se obține din (7) punînd condiția $x = l$:

$$\sin(\omega t' + \alpha) = (l + x_0)/A, \quad t' = \frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{l + x_0}{A} - \alpha \right), \tag{22}$$

astfel încît timpul total pînă la oprire :

$$\tau = t' + v'/(\mu_2 g). \tag{23}$$

**** 1.3.75.** a) $F = \frac{1}{2} kS\rho(v_0 - v)^2 = ma = m \frac{dv}{dt}.$ (1)

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{mdv}{\frac{1}{2} kS\rho(v_0 - v)^2}, \quad \int dt = t = \frac{2m}{kS\rho} \int \frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \\ &= \frac{2m}{kS\rho} \left(\frac{1}{v_0 - v} + C \right), \end{aligned}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$: $0 = 1/v_0 + C$, $C = -1/v_0$,

$$t = \frac{2m}{kS\rho} \left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0} \right), \quad v = v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}. \tag{2}$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = t = \frac{2m}{kS\rho} \int_0^v \frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \frac{2m}{kS\rho} \left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Continuăm integrarea :

$$dx = v dt, \int dx = x = \int v dt = \int \left(v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)} \right) dt = \\ = v_0 t - \frac{2m}{kS\rho} \left[\ln \left(\frac{1}{v_0} + \frac{kS}{2m} t \right) + C' \right],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } x = 0 : 0 = \ln \frac{1}{v_0} + C', C' = -\ln \frac{1}{v_0},$$

$$x = v_0 t - \frac{2m}{kS\rho} \ln \left(1 + \frac{kS\rho}{2m} v_0 t \right). \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \left(v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)} \right) dt = v_0 t - \\ - \frac{2m}{kS\rho} \ln \frac{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}{1/v_0}.$$

b) Teoretic barca atinge viteza vântului v_0 când $t \rightarrow \infty$ (atunci și $x \rightarrow \infty$). Timpul cerut se obține punând $v = fv_0$ în legea vitezei (2) :

$$\tau = \frac{2m}{kS\rho v_0} \frac{f}{1-f}. \quad (4)$$

Luind $m = 130$ kg, $k = 1,0$, $S = 10$ m², $\rho = 1,3$ kg/m³, $v_0 = 10$ m/s, $f = 0,99 = 99\%$, găsim $\tau \cong 30$ min.

Dacă înlocuim pe t (2) în $x(3)$ găsim $x = x(v)$:

$$x = \frac{2m}{kS\rho} \left(\frac{v_0}{v_0 - v} - \ln \frac{v_0}{v_0 - v} \right). \quad (5)$$

Distanța parcursă în timpul τ (4) se obține introducând $v = fv_0$ în (5) sau $\tau(4)$ în (3) :

$$s = \frac{2m}{kS\rho} \left(\frac{f}{1-f} - \ln \frac{1}{1-f} \right). \quad (6)$$

Ca evaluare : $s \cong 2,0$ km.

Se poate obține $s = s(v)$ direct prin integrare, înmulțind ambii membri

ai ecuației fundamentale cu $v = \frac{dx}{dt}$:

$$v dt = dx = - \frac{m v dr}{\frac{1}{2} \cdot kS\rho (v_0 - v)^2} = - \frac{2m}{kS\rho} \frac{v - v_0 + v_0}{(v_0 - v)^2} dv,$$

$$\int dv \quad x = - \frac{2m}{kS\rho} \left[\int \frac{dv}{v - v_0} + \int \frac{v_0 dv}{(v_0 - v)^2} \right] = \\ = \frac{2m}{kS\rho} \left[\ln |v - v_0| + v_0 \frac{1}{v_0 - v} + C'' \right],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$

avem $r = 0$ și $x = 0 : 0 = \ln v_0 + 1 + C''$, $C'' = -\ln v_0 - 1$,

$$x = -\frac{2m}{kS\rho} \left[\ln \frac{v_0 - v}{v_0} + \frac{v}{v_0 - v} \right]$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = -\frac{2m}{kS\rho} \left[\int_0^v \frac{dv}{v - v_0} + \int_0^v \frac{v_0 dv}{(v_0 - v)^2} \right] =$$

$$= -\frac{2m}{kS\rho} \left[\ln \left| \frac{v - v_0}{-v_0} \right| + v_0 \left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0} \right) \right].$$

c) Puterea dezvoltată de forța vântului:

$$P = Fv = \frac{1}{2} kS\rho(v_0 - v)^2 \cdot v. \quad (7)$$

Dacă scriem

$$P \sim (v_0 - v)(v_0 - v) \cdot 2v,$$

atunci avem un produs de 3 factori (numai doi diferiți) a căror sumă este constantă, de aceea produsul va fi maxim cînd factorii sînt egali între ei:

$$v_0 - v = v_0 - v = 2v, \quad v = v_0/3. \quad (8)$$

Acest rezultat se poate obține, desigur, punînd condiția de anulare a derivatei:

$$P'(v) \sim -2(v_0 - v)v + (v_0 - v)^2 = 0, \text{ de unde } v = v_0/3$$

($v = v_0$ corespunde minimului $P = 0$ și nu este realizabil fiziceste).

**** 1.3.76.** $N - mg \sin \theta = ma_n = mv^2/R$, $mg \cos \theta - \mu N = ma_t = m \frac{dv}{dt}$. (1)

Eliminăm pe N din cele două ecuații:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \cos \theta - \mu(mg \sin \theta + mv^2/R),$$

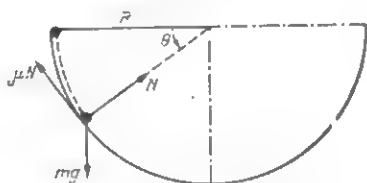


Fig. 1.3.76 R

Înmulțim cu $ds = vdt = R d\theta$:

$$m \frac{dv}{dt} ds = -\mu m v^2 d\theta + mg(\cos \theta - \mu \sin \theta) R d\theta$$

sau

$$dE_c + 2\mu E_c d\theta = mg(\cos \theta - \mu \sin \theta) R d\theta. \quad (2)$$

Aici variabilele nu se separă direct, dar înmulțind ecuația cu un factor convenabil (numit factor integrand), variabilele se separă.

În cazul nostru înmulțim cu $e^{2\mu\theta}$:

$$e^{2\mu\theta} dE_c + 2\mu e^{2\mu\theta} E_c d\theta = mg(\cos \theta - \mu \sin \theta) R e^{2\mu\theta} d\theta$$

sau

$$d(E_c e^{2\mu\theta}) = mg(\cos \theta - \mu \sin \theta) R e^{2\mu\theta} d\theta. \quad (3)$$

Integrăm :

$$\int d(E_c e^{2\mu\theta}) = E_c e^{2\mu\theta} = mgR \int (\cos\theta - \mu \sin\theta) e^{2\mu\theta} d\theta. \quad (4)$$

Integrala din membrul drept este ușor de calculat, fiindcă integrala funcției exponențiale înmulțită cu funcții trigonometrice este de același tip și aplicăm metoda identificării :

$$\int (\cos\theta - \mu \sin\theta) e^{2\mu\theta} d\theta = (A \cos\theta + B \sin\theta) e^{2\mu\theta} + C.$$

Prin derivarea membrului drept trebuie să regăsim integrandul din stînga :

$$(\cos\theta - \mu \sin\theta) e^{2\mu\theta} = (-A \sin\theta + B \cos\theta) e^{2\mu\theta} + 2\mu(A \cos\theta + B \sin\theta) e^{2\mu\theta},$$

prin identificare :

$$1 = B + 2\mu A, \quad -\mu = -A + 2\mu B,$$

de unde

$$A = \frac{3\mu}{1 + 4\mu^2}, \quad B = \frac{1 - 2\mu^2}{1 + 4\mu^2}. \quad (5)$$

Integrala (4) devine :

$$E_c = mgR \frac{3\mu \cos\theta + (1 - 2\mu^2) \sin\theta}{1 + 4\mu^2} + C e^{-2\mu\theta},$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$

avem $\theta = 0$ și $E_c = 0$: $0 = mgR \frac{3\mu}{1 + 4\mu^2} + C$, astfel încît :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mgR}{1 + 4\mu^2} [3\mu \cos\theta + (1 - 2\mu^2) \sin\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}]. \quad (6)$$

(**) 1.3.77. a) Cîmpul de forțe este *conservativ* :

$$E_p(x) = - \int_0^x F dx = \begin{cases} - \int_0^x (-F_0) dx = +F_0 x \text{ pentru } x > 0, \\ - \int_0^x F_0 dx = -F_0 x \text{ pentru } x < 0 \end{cases}$$

deci $E_p(x) = F_0 |x|$.

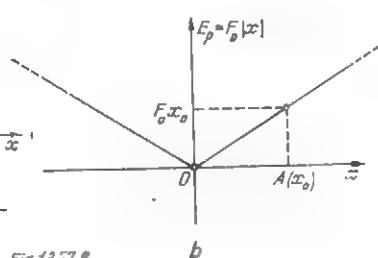
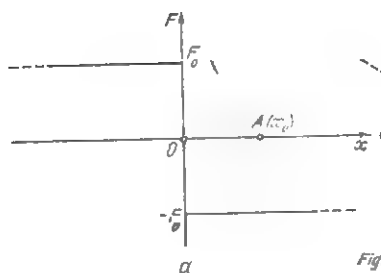


Fig. 13.77 R

Am ales $E_p = 0$ în origine (Vd. figura). Particula se mișcă în „groapa de potențial” din figură, fiind supusă și la o forță de frecare.

Teorema variației energiei mecanice spune că variația energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forțelor *neconservative*:

$$\Delta(E_c + E_p) = L_{\text{necons.}} = \int F_{\text{necons.}} dx. \quad (2)$$

Forțele de frecare sînt *neconservative*, ele se opun mișcării și fac lucru mecanic *negativ*, deci energia mecanică *scade*, transformîndu-se în căldură. În cazul nostru particula are inițial energie potențială $E_p(x_0) = F_0 x_0$; ea va oscila în jurul originii pînă se va opri în origine: $E_p(0) = 0$, energia sa potențială transformîndu-se în căldură, deci

$$Q = F_0 x_0 = 1,00 \text{ J}. \quad (3)$$

b) Deoarece forțele sînt constante mișcarea va fi uniform variată cu accelerația

$$a = \frac{1}{m} (\mp F_0 + F_f) \text{ sau } a = \frac{1}{m} (\pm F_0 - F_f).$$

Dar pentru mișcarea uniform variată este valabilă formula lui Galilei

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)} \quad (4)$$

al cărei grafic este o *parabolă* (cu axa de simetrie Ox):

$$x = \frac{1}{2a} v^2 + \left(x_0 - \frac{1}{2a} v_0^2 \right), \text{ (funcție pătratică),} \quad (5)$$

de aceea graficul $v = v(x)$ este format din segmente de parabolă ca în figură.

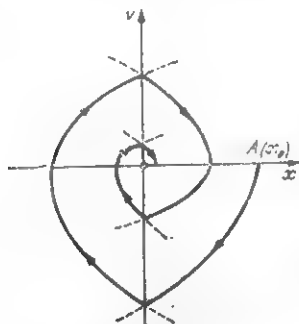


Fig. 1.3.77cR

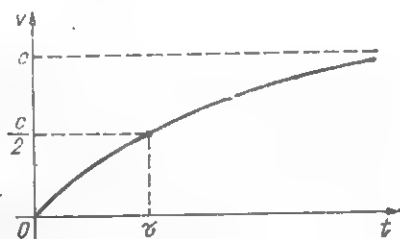


Fig. 1.3.78R

**** 1.3.78.** a) c este viteza limită maximă posibilă (pentru $t \rightarrow \infty$), iar τ este momentul în care viteza atinge valoarea $c/2$ (vd. figura).

$$b) a = \frac{dv}{dt} = \frac{c\tau}{(t + \tau)^2}, \quad (1)$$

$$F = ma = \frac{mc\tau}{(t + \tau)^2}. \quad (2)$$

$$L = \int_0^x F dx = \int_0^t F v dt = \int_0^t \frac{mc\tau}{(t + \tau)^2} \cdot c \frac{t}{t + \tau} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= mc^2 \tau \int_0^t \frac{t + \tau - \tau}{(t + \tau)^3} dt = mc^2 \tau \left[\int_0^t \frac{dt}{(t + \tau)^2} - \tau \int_0^t \frac{dt}{(t + \tau)^3} \right] = \\
&= mc^2 \tau \left[-\frac{1}{t + \tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{1}{(t + \tau)^2} - -\frac{\tau}{2\tau^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} m \frac{c^2 t^2}{(t + \tau)^2} = \frac{1}{2} m v^2.
\end{aligned} \quad (3)$$

c) Se verifică imediat teorema variației energiei cinetice :

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4)$$

**** 1.3.79.** $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (v_0 + Ax) = A \frac{dx}{dt} = Av,$

separăm variabilele și integrăm :

$$dt = \frac{dv}{Av}, \quad \int dt = t = \int \frac{dv}{Av} = \frac{1}{A} (\ln v + C),$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } v = v_0 : 0 = \ln v_0 + C, C = -\ln v_0,$$

$$t = \frac{1}{A} \ln \frac{v}{v_0}, \quad v = v_0 e^{At}. \quad (1)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{Av} = \frac{1}{A} \ln \frac{v}{v_0},$$

Pentru a afla lucrul mecanic putem aplica direct teorema variației energiei cinetice :

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{2At} - 1). \quad (2)$$

Din legea vitezei (1) se vede imediat că pentru $t = 1/A$, viteza $v = v_0 e$, deci devine de $e = 2,7$ ori mai mare decât cea inițială.

**** 1.3.80.** $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta ds = (F_0 + As) \cos (Bs) \cdot ds,$

$$L = \int dL = \int F_0 ds + \int A \cos (Bs) ds.$$

Să calculăm integrala (prin părți) :

$$\begin{aligned}
I &= \int x \cos x dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx = \\
&= x \sin x + \cos x.
\end{aligned} \quad (1)$$

Deci în cazul nostru :

$$L = F_0 \int ds + \frac{A}{B^2} \int Bs \cos(Bs) d(Bs) = F_0 s + \frac{A}{B^2} (Bs \sin Bs + \cos Bs) + C$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine :

$$\text{la } s = 0, L = 0; 0 = \frac{A}{B^2} + C, C = -\frac{A}{B^2},$$

$$L = F_0 s + \frac{A}{B^2} (Bs \sin Bs + \cos Bs - 1). \tag{2}$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^s dL = L = \int_0^s F_0 ds + \frac{A}{B^2} \int_0^s Bs \cos(Bs) d(Bs) = F_0 s + \frac{A}{B^2} (Bs \sin Bs + \cos Bs) \Big|_0^s,$$

Lucrul mecanic total, cerut, se obține imediat punând $\pi/2 = Bs, s = \pi/(2B)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi}{2B} F_0 + \frac{A}{B^2} \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \\ &= \frac{\pi}{2B} F_0 + \frac{A}{B^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \end{aligned} \tag{3}$$

•• 1.3.81. $v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct, a = \frac{dv}{dt} = 2C, F = ma = 2mC,$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^s F dx = \int_0^t F v dt = \int_0^t 2mC(B + 2Ct) dt = 2mC(Bt + Ct^2) = \\ &= 2m Ct(B + Ct). \end{aligned}$$

1.4. Impulsul mecanic

1.4.1. $l_1/l_2 = \sqrt{\rho_2/\rho_1}, m_1/m_2 = \sqrt{\rho_1/\rho_2}.$

1.4.2. $x = d (m_2 - m_1) : (m_1 + m_2 + M) = 1,00 \text{ m}.$

1.4.3. $x = - h m_1 : (m_1 + m_2 + M) = - 0,20 \text{ m}.$



Fig. 14.1R

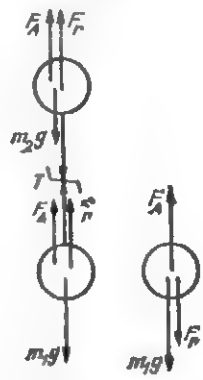


Fig. 14.9R a

$$1.4.4. f = 4(v_2/v_1 - v_2^2/v_1^2) = 36\%$$

$$1.4.5. E'_1/E_1 = [(1-r):(1+r)]^2.$$

$$1.4.6. v'_2 = 2 m_1 v_1 : (m_1 + m_2) \rightarrow 2v_0, m_1/m_2 \rightarrow \infty.$$

$$1.4.7. p = (2-f) nm(v \mp u)^2 = 1,02 \text{ kN, resp. } 2,30 \text{ kN.}$$

$$1.4.8.a = 2g.$$

$$1.4.9. a) T = \frac{1}{2} (m_1 - m_2)g = 9,8 \text{ N};$$

$$b) a'_1 = g \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{m_2}{2m_1} - 2\rho \frac{V}{m_1} \right] = \frac{3}{2} g.$$

$$1.4.10. a) \text{ simultan: } v_2 = u. 2m:(M+2m) = 2,0 \text{ m/s, succesiv:}$$

$$v'_2 = um[1:(M+m) + 1:(M+2m)] = 2,2 \text{ m/s};$$

$$b) \text{ Simultan: } v_2 = 0; \text{ succesiv:}$$

$$v'_2 = -um^2:[(M+m)(M+2m)] = -0,20 \text{ m/s.}$$

$$1.4.11. x = m^2 v^2 : [2\mu g (m+M)^2] = 1,00 \text{ m.}$$

$$1.4.12. v'_n = v_1 [2k:(1+k)]^{n-1}; \eta = [4k:(1+k)^2]^{n-1}.$$

$$1.4.13. h_2 = h_1 M^2/m^2 = 90 \text{ cm.}$$

$$1.4.14. v_0 = \sqrt{2\mu g l (1+m/M)} = 3,0 \text{ m/s.}$$

$$1.4.15. s = m_2 v_0^2 : [2\mu g (m_1 + m_2)] = 70 \text{ cm.}$$

$$1.4.16. v_0 = 2\sqrt{\mu g l (1+m/M)} = 2,8 \text{ m/s.}$$

$$1.4.17. v_{1,2} = \sqrt{2W m_{2,1} : [m_{1,2}(m_1 + m_2)]} = 200 \text{ m/s, resp. } 100 \text{ m/s.}$$

$$1.4.18. v = 2\sqrt{2gh} = 8,4 \text{ m/s.}$$

$$1.4.19. f = 1 - (v/v_0)^2 = (1-v/r_0)^2 \quad m/M = 0,64.$$

$$1.4.20. [1:(1-f^2)] + 1 = 3.$$

$$1.4.21. v_2 = -um:(m+M) = -0,20 \text{ m/s}; \mu = v_2^2:(2gs) = 0,010$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} u^2 = 13,2 \text{ J.}$$

$$1.4.22. h' = 2gh^2:(|\Delta \vec{p}|/m - \sqrt{2gh})^2 = 7,0 \text{ cm.}$$

$$1.4.23. Q = mgh + \frac{1}{2} m M v^2:(m+M) = 164,7 \text{ J.}$$

$$1.4.24. P = Qv_0^2 = 4,0 \text{ kN.}$$

$$1.4.25. F = \frac{1}{\tau} \sqrt{m_1^2 2gh_1 + 2gh_2(m_1 + m_2)^2} = 1,96 \text{ kN.}$$

$$1.4.26. t = \sqrt{2h/g} (1+f+k):(1-k); s = h(1+k^2):(1-k^2) = 5,2 \text{ m.}$$

$$1.4.27. v_2 = -um:(m+M) = -0,60 \text{ m/s}; E_c = \frac{1}{2} m M u^2:(m+M) =$$

$$= 12,0 \text{ J.}$$

$$1.4.28. d = m v_0^2 : [2\mu g (m + m_0)] = 2,45 \text{ m.}$$

$$1.4.29. v'_1 = v + um:(M+m) = 0,80 \text{ m/s,}$$

$$v'_2 = v + um^2:[M(M+m)] = 0,62 \text{ m/s, } v'_3 = v - um(M+2m):$$

$$:(M+m)^2 = 0,38 \text{ m/s.}$$

$$(**) 1.4.30. \text{ Teorema variației impulsului pentru punctul material } \int \vec{F} dt = m\Delta \vec{v} \text{ în cazul unidimensional (proiectată pe axa } Ox) \text{ dă}$$

$$\int F dt = m \Delta v, \quad (1)$$

Aplicăm această teoremă separat pentru cele două corpuri. Observăm că impulsul forței $\int F dt$ reprezintă aria mărginită de graficul forței. În procesul ciocnirii interacția este descrisă prin cele două forțe de percucie, acțiunea și reacțiunea. În cazul nostru asupra primului corp acționează forța $-|F|$, iar asupra celui de-al doilea forța $+|F|$, pe axa Ox . Aria $\int F dt$ este în cazul nostru aria unui triunghi: $\frac{1}{2} F_0 \tau$, prin urmare:

$$-\frac{1}{2} F_0 \tau = m_1 v'_1 - m_1 v_1, \quad \frac{1}{2} F_0 \tau = m_2 v'_2 - m_2 v_2, \quad (2)$$

de unde

$$v'_1 = v_1 - \frac{1}{2m_1} F_0 \tau = -10 \text{ m/s}; \quad v'_2 = v_2 + \frac{1}{2m_2} F_0 \tau = -5,0 \text{ m/s}. \quad (3)$$

Coeficientul de restituție este prin definiție:

$$k = -(v'_1 - v'_2) : (v_1 - v_2) = 0,20. \quad (4)$$

Căldura degajată prin ciocnire:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2 = 40 \text{ J}. \end{aligned} \quad (5)$$

Se poate judeca și fără integrale, scriind legea (1) astfel

$$\langle F \rangle \Delta t = m \Delta v, \quad (6)$$

unde $\langle F \rangle$ este forța medie pe intervalul de timp Δt . Dar din definiția și interpretarea geometrică a valorii medii rezultă că $\langle F \rangle \Delta t$ este aria de sub graficul forței în diagrama $F - t$ (forța reprezentată în funcție de timp).

$$1.4.31. \quad h_0 = \frac{1}{2g} (v_0 - \sqrt{2gh} \cdot m/m_0)^2 = 46 \text{ m}.$$

$$\begin{aligned} 1.4.32. \quad v'' &= \frac{1}{1-f} \sqrt{f^2 v'^2 + (1-2f)v_0^2} = 10,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad t = \\ &= \frac{1}{g} \left[\frac{1}{1-f} \sqrt{v'^2 - v_0^2} + v'' - v' \right] = 1,28 \text{ s}. \end{aligned}$$

$$1.4.33. \quad v_{\text{cm}} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) : (m_1 + m_2) = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$1.4.34. \quad \Delta E_c = 2m v_2 (v_1 + v_2) = 1,00 \cdot 10^{-22} \text{ J}, \quad \Delta p = -2m(v_1 + v_2) = -0,50 \cdot 10^{-22} \text{ N}\cdot\text{s}.$$

$$1.4.35. \quad \text{a) } 4m_1 m_2 : (m_1 + m_2)^2, \quad \text{b) } m_1 m_2 : (m_1 + m_2)^2, \quad \text{c) } m_2 : (m_1 + m_2),$$

d) $m_1 = m_2$.

$$1.4.36. \quad a_{\text{cm}} = g(m_2 - m_1)^2 : (m_1 + m_2)^2 = 0,39 \text{ m/s}^2.$$

$$1.4.37. \quad m_{1,2} = v_{2,1}(v_1 + v_2)^2 T / (2\pi \gamma) = 3,7 \cdot 10^{29} \text{ kg, resp. } 1,85 \cdot 10^{29} \text{ kg}.$$

$$1.4.38. \quad T = 4\pi^2 n^2 l m_1 m_2 : (m_1 + m_2) = 9,46 \text{ N}.$$

$$1.4.39. \quad 1 - 1/n < f < 1 - 1/n^2 \text{ sau } \frac{2}{3} < f < \frac{8}{9}.$$

$$1.4.40. \quad m_2/m_1 = (\sqrt{E_1} + \sqrt{E'_1}) : (\sqrt{E_1} - \sqrt{E'_1}) = 15,6.$$

$$1.4.41. \quad v'' = (v - \sqrt{v^2 - v_0^2}) \cdot m : (m + M) = 1,00 \text{ m/s}.$$

$$1.4.42. \quad v_{\text{max}} = 12 \text{ v}_0, \quad t_{\text{min}} = 137 \text{ l} : (120 \text{ v}_0).$$

1.4.43. a) $\sin(\alpha'_1/2) = \sin(\alpha_1/2) \cdot (m_1 - m_2) : (m_1 + m_2)$; $\alpha'_1 = -11^\circ 29'$, $\sin(\alpha'_2/2) = \sin(\alpha_1/2) \cdot 2m_1 : (m_1 + m_2)$, $\alpha'_2 = 47^\circ 9'$; b) $\sin(\alpha'/2) = \sin(\alpha_1/2) \cdot m_1 : (m_1 + m_2)$, $\alpha' = 23^\circ 4'$; c) $Q = 2gl \sin^2(\alpha_1/2) \cdot m_1 m_2 : (m_1 + m_2) = 1,18 \text{ J}$.

1.4.44. $v' = \sqrt{m^2 v_0^2 + M^2 gH + (m + M)^2 gH} : (m + M) = 12 \text{ m/s}$.

1.4.45. $N = [(v_0/d)\sqrt{2h/g}] = 90$.

1.4.46. $t = \sqrt{2/g} [-\sqrt{H-h-M} : (M+m) + \sqrt{(H-h)M^2 : (M+m)^2 + h}] = 0,45 \text{ s}$.

1.4.47. $v = \sqrt{glM : [(m + M) \sin 2\alpha]}$, $v_{\min} = 1,4 \text{ m/s}$ pentru $\alpha = 45^\circ$.

1.4.48. $v_{r\min} = \sqrt{gl} = 3,83 \text{ m/s}$ pt. $\text{tg}\alpha = 1 + \frac{m}{M}$, $W = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M}$.

$gl \left(1 + \frac{m}{2M}\right) = 276 \text{ J} > W_{\min} = \frac{1}{2} \frac{mM}{m + M} gl \sqrt{1 + m/M}$.

1.4.49. $x_m = 2\mu(\sqrt{2gh} \cdot t + 2h) \approx 9 \text{ m}$.

1.4.50. $H = (m/M)^2 (v_0 \sin \alpha - \sqrt{2gh})^2 / (2g) = 11 \text{ cm}$.

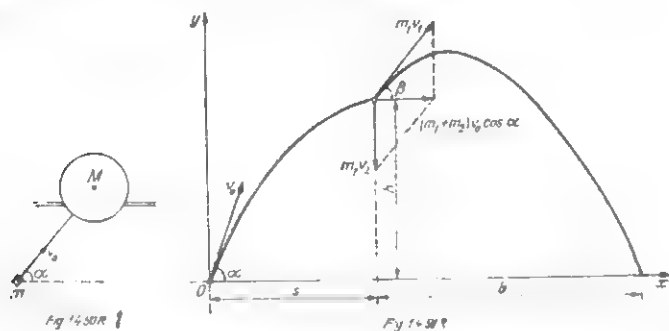


Fig. 14.50R

Fig. 14.50P

1.4.51. $h = v_1^2 \tau + \frac{1}{2} g \tau^2$, $v_1 = 60 \text{ m/s}$; $v_0 \cos \alpha = s \sqrt{g/(2h)} = 150 \text{ m/s}$

$\text{tg}\beta = kv_1^2 : [(1 + k)v_0 \cos \alpha] = 4/15$; $v_1^2 \cos \beta = (1 + k)v_0 \cos \alpha = 450 \text{ m/s}$

$b = [\text{tg}\beta + \sqrt{\text{tg}^2\beta + 2gh/(v_1^2 \cos^2\beta)}] \cdot v_1^2 \cos^2\beta : g = 11,88 \text{ km}$.

1.4.52. $v' = v_1 [\sin^2\beta + n^2 \sin^2\alpha - 2n \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)]^{1/2} : [(1 + n) \sin \beta] = 14 \text{ m/s}$.

1.4.53. $W = mgb^2(1 + m/M)/(4h) = 347 \text{ J}$.

1.4.54. $h_m = h \cos^2 2\alpha = 1,00 \text{ m}$, $b = 2h \sin 4\alpha = 6,93 \text{ m}$.

1.4.55. $v_1 = (b/4)\sqrt{g/(2h)} = 1,00 \text{ m/s}$.

1.4.56. $t_u/t_c = s_u/s_c = f = 0,50$.

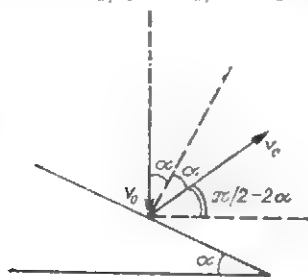


Fig. 14.54R

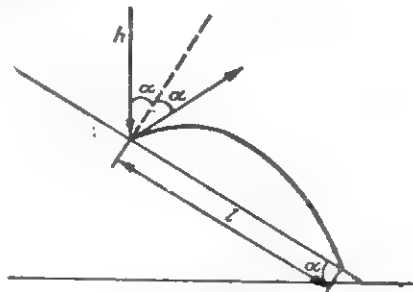


Fig. 14.53R

$$1.4.57. \mu = \operatorname{tg} \alpha \cdot (1-f) : (1+f) = 0.25.$$

$$1.4.58. v_m = \frac{1}{2} g t \sin \alpha = 3.5 \text{ m/s}, l_{\min} = 2m \cdot \frac{1}{2} g t \sin \alpha = 7.0 \text{ N}.$$

$$1.4.59. \sin \alpha = l / (\delta h), \alpha = 30^\circ.$$

$$1.4.60. \operatorname{tg} \beta = n \cdot \operatorname{tg} \alpha, n \in \mathbb{N}.$$

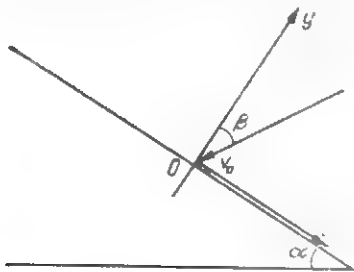


Fig. 14.60R

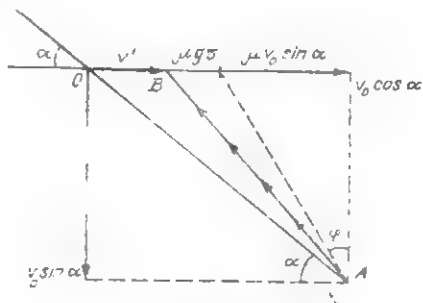


Fig. 14.61R

$$1.4.61. [\text{Fie}] \tau \text{ durata alunirii, } v' = v_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g \tau \approx v_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha), v_0 = \frac{1}{2} g t (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha), s \lesssim h (1 / (\mu - \operatorname{tg} \alpha) (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2) = 1.00 \text{ m}.$$

$$1.4.62. \text{Condiția de oprire la baza planului: } \mu \geq (1 - mg/N) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

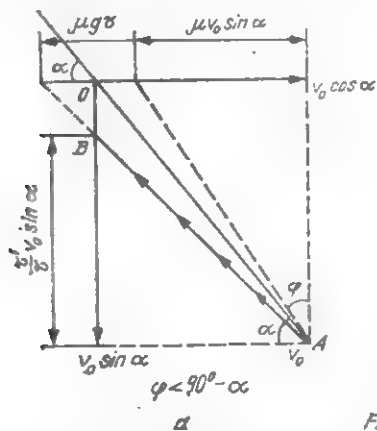
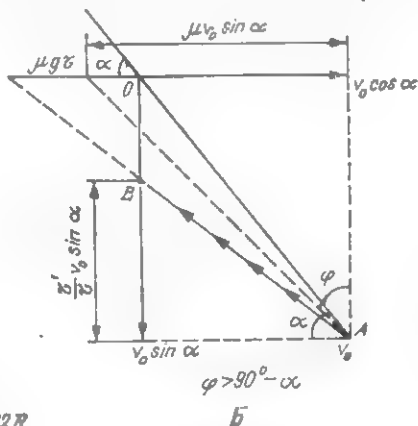


Fig. 14.62R



b

(N — reacțiunea planului orizontal care este sigur îndeplinită dacă $\varphi > \frac{\pi}{2} - \alpha$, ceea ce se întâmplă în cazul nostru.

$$1.4.63. v' = v_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g \tau > 0 \text{ dă condiția din enunț.}$$

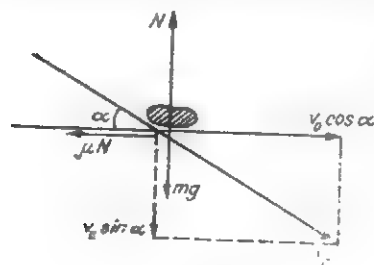


Fig. 14.63R

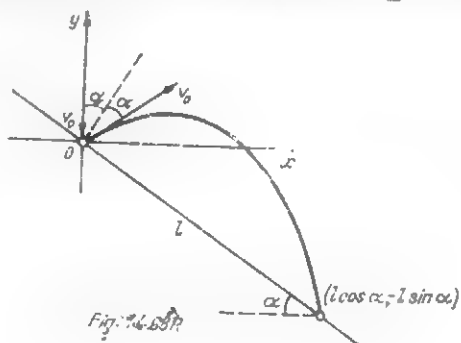


Fig. 14.64R

1.4.64. Condiția de oprire: $\mu \geq (1 - mg/N) \operatorname{ctg} \alpha$ (vd. problema 1.4.62) este sigur îndeplinită dacă $\mu \geq \operatorname{ctg} \alpha$ sau $\varphi > 90^\circ - \alpha$.

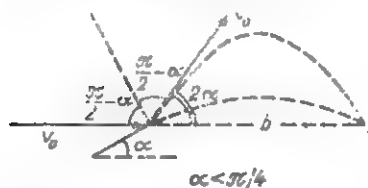
1.4.65. $v_{\max} = gT/(2 \sin \alpha) = 9,8 \text{ m/s}$, $v_{\min} = \frac{1}{2} \cdot gT \operatorname{ctg} \alpha = 8,49 \text{ m/s}$.

1.4.66. $\tau = \frac{2}{g} \sin \alpha \sqrt{2s/g}$: $[\sqrt{\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha} (\sqrt{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} - \sqrt{\sin \alpha - \mu \cos \alpha})] = 9,37 \text{ s}$, $d = s \operatorname{tg} \alpha / \mu = 16,3 \text{ m}$.

1.4.67. $H = h + l \sin^3 \alpha = 1,00 \text{ m}$.

1.4.68. $l = 8 h \sin \alpha = 4,0 \text{ m}$.

1.4.69. $\cos \alpha = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 35^\circ$ sau $\cos \alpha = \sqrt{2/5}$, $\alpha = 50^\circ 40'$.



$\alpha < \pi/4$

α

Fig. 1.4.69R



$\alpha > \pi/4$

b

1.4.70. $u = \sqrt{2mgl} : [M(1 + M/m)] = 0,70 \text{ m/s}$.

1.4.71. $h = l \cos^2 2\alpha = 0,20 \text{ m}$.

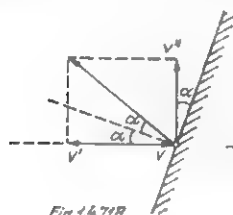


Fig. 1.4.71R

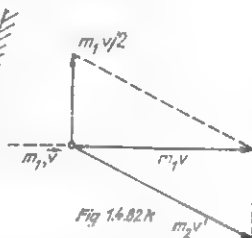


Fig. 1.4.71R

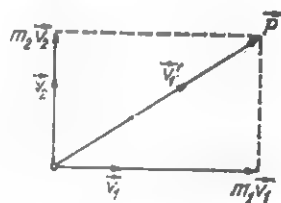


Fig. 1.4.71R

1.4.72. $v_0 = \frac{2}{m} \sqrt{gl} \left(M \sin \frac{\alpha}{2} \pm (m + M) \sin \frac{\alpha'}{2} \right) = 22,7 \text{ m/s}$ sau $5,3 \text{ m/s}$.

1.4.73. $T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \alpha)$, $T_{\max} = 3 mg \cos \theta$, $T_r = 1,5 mg$, $\theta_r = 60^\circ$, $H = h + l(1 - \cos^3 \theta_r) = 1,00 \text{ m}$.

1.4.74. $\mu_{\max} = \frac{l}{d} 4m^2 : (m + M)^2 = 0,22$, $\mu_{\min} = \frac{l}{d} m^2 : (m + M) = 0,055$.

1.4.75. $s = 4WM : [mg(m + 2M)]$, $F = \frac{2}{\Delta t} \sqrt{WmM : (m + 2M)}$;

barcă: $M \approx \frac{m}{2}$, $s \approx W/(mg)$, $F \approx \frac{1}{\Delta t} \sqrt{mW}$; șlep: $M \gg m$, $s \approx 2W/(mg)$,

$F \approx \frac{1}{\Delta t} \sqrt{2mW}$.

1.4.76. a) $F = 5mg = 490 \text{ N}$, b) $F = 6mg = 588 \text{ N}$.

1.4.77. $v \geq \sqrt{Rg(1 + M/m)} = 17,8 \text{ m/s}$.

(*) **1.4.78.** $E'_c = \frac{1}{2} m_1 m_2 (2v)^2 : (m_1 + m_2)$, $f = E'_c/E_c = \left[\frac{1}{2} m_1 m_2 4v^2 \right]$

$/(m_1 + m_2) \left] : \left[\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \right] = 4m_1 m_2 : (m_1 + m_2)^2. \quad (1)$

Transcriem rezultatul astfel :

$$f = \frac{4}{(\sqrt{m_1/m_2} + \sqrt{m_2/m_1})^2}. \quad (2)$$

Acum se vede că la numitor avem suma a două mărimi variabile, dar al căror produs este *constant*, deci suma va fi minimă când termenii sînt egali (atunci fracția f va fi maximă) :

$$\sqrt{m_1/m_2} = \sqrt{m_2/m_1}, \text{ de unde } m_1 = m_2. \quad (3)$$

Deci în cazul ciocnirii considerate cantitatea de căldură degajată este maximă când masele sînt egale între ele.

Altfel, cu ajutorul derivatelor :

$$f = \frac{4}{F^2}, \text{ unde } F(r) = r + \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{m_1/m_2},$$

$$F'(r) = 0 = 1 - \frac{1}{r^2}, \text{ de unde } r = 1 = \sqrt{m_1/m_2}.$$

$$F''(r) = \frac{2}{r^3} > 0.$$

Numitorul fiind minim, fracția va fi maximă.

$$1.4.79. -\Delta E_c/E_c = 1 - \sqrt{h_2/h_1}.$$

$$1.4.80. m_1/m_2 = k : (2 + k) = 1/3.$$

1.4.81. Condiția de posibilitate a problemei : $2md/(\pi \theta l M) = 4n + 1$ pentru punctul A și $= 4n + 3$ pentru B ; $\operatorname{tg} \alpha = (l/d) [(\pi k/2)^2 : 2 - 1]$,
 $v_0 = \sqrt{gl} \sqrt{(1 + d^2/l^2) \cdot 4/(\pi k)^2 + (\pi k/2)^2 : 4 - 1}.$

$$1.4.82. m_2 = 5m_1/3 = 0,500 \text{ kg}.$$

$$1.4.83. v_1' = (1/m_1) \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} = 7,07 \text{ m/s},$$

$$Q = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 (1 - m_2/m_1) = 2,5 \text{ J}.$$

$$1.4.84. Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 (1 - m_1/m_2) = 25 \text{ J}.$$

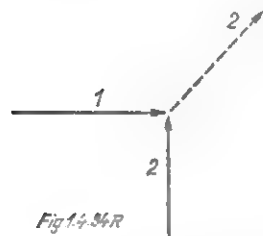


Fig. 1.4.84R

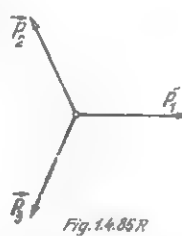


Fig. 1.4.85R

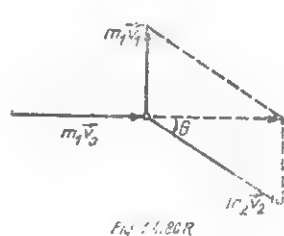


Fig. 1.4.86R

$$1.4.85. v_i = \frac{1}{m_i} \sqrt{2E_c : (1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$1.4.86. v_1^2 = v_0^2 (r-1) : (r+1), v_2^2 = v_0^2 : 2 : [r(r+1)], \operatorname{tg} \theta = \sqrt{(r-1) : (r+1)}.$$

$$1.4.87. v_1' = v_1 \sin \theta_2 : \sin(\theta_1 + \theta_2), v_2' = v_1 (m_1/m_2) \sin \theta_1 : \sin(\theta_1 + \theta_2);$$

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 [(m_1/m_2) \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - \sin^2(\theta_1 + \theta_2)] : \sin^2(\theta_1 + \theta_2)$, condiția $m_1 = m_2$ și $\Delta E_c = 0$ dacă $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$.

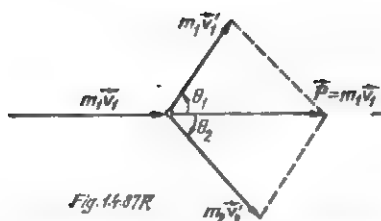


Fig. 14.87R

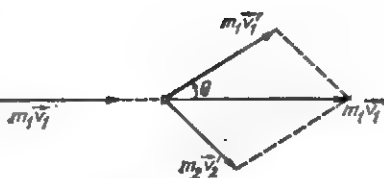


Fig. 14.88R

* 1.4.88. Din triunghiul impulsurilor (teorema cosinusului):

$$(m_2 v_2')^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_1 v_1')^2 - 2m_1 v_1 m_1 v_1' \cos \theta. \quad (1)$$

Conservarea energiei cinetice (ciocnire perfect elastică):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (2)$$

a) Din cele două ecuații rezultă

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 (m_1 \cos \theta \mp \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta}) : (m_1 + m_2) = \\ &= v_1 \frac{1}{1+r} (\cos \theta \mp \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}), \\ v_2' &= v_1 \frac{\sqrt{2}}{1+r} \sqrt{\sin^2 \theta + r \pm \cos \theta \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}}, |\sin \theta| \leq r. \end{aligned} \quad (3)$$

$$r = m_2/m_1.$$

Schimbarea semnului lui θ dă aceeași soluție, de aceea vom considera $\theta \in (0, \pi]$, $\sin \theta > 0$.

Deoarece $v_1' = |\vec{v}_1'| \geq 0$, soluția cu minus radical este admisibilă dacă $\cos^2 \theta \geq r^2 - \sin^2 \theta$, adică $r \leq 1$.

Pentru $r = 1$, ($m_1 = m_2$) avem.

$$v_1' = 0, v_2' = v_1 \text{ sau } v_1' = v_1 \cos \theta, v_2' = v_1 \sin \theta, (m_1 = m_2), \quad (4)$$

în ultimul caz particulele pleacă pe direcții perpendiculare între ele. În primul caz θ este nedeterminat, dar se poate considera $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ și atunci

primul caz apare ca un caz limită al celui de-al doilea.

Pentru $r < 1$, $\theta < \pi/2$, ($\sin \theta < r$) avem cele două soluții.

Pentru $r < 1$, $\theta > \pi/2$, ($\sin \theta < r$) avem numai soluția cu plus radical.

Pentru $r > 1$, avem numai soluția cu plus radical.

$$\begin{aligned} b) \quad f &= -\Delta E_{c1} : E_{c1} = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \right) : \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) = \\ &= \frac{2}{(1+r)^2} (r + \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}). \end{aligned} \quad (5)$$

c) Frațiunea f depinde de raportul $r = m_2/m_1$ și de unghiul θ .

Să considerăm întâi $r = 1$, atunci

$f = 1$ sau $f = \sin^2 \theta$, deci f este maxim când

$$v_1' = 0, v_2' = v_1, (\theta \rightarrow \pi/2).$$

Să considerăm și cazul particular $\sin \theta = r < 1$, atunci

$$f = \frac{2r}{1+r} = \frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad (r = \sin \theta < 1)$$

care crește monoton către 1 când $r = \sin \theta \rightarrow 1$.

Să calculăm cele două derivate parțiale :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2}{(1+r)^3 \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}} [(1-r-2\sin^2 \theta) \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta} \pm \cos \theta (r-r^2+2\sin^2 \theta)]. \quad (7)$$

Pentru $r = 1$ această derivată se poate anula. Acest caz l-am considerat mai sus.

Scriind f sub forma :

$$f = \frac{2}{(1+r)^2} (r+1 - \cos^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{r^2 - 1 + \cos^2 \theta}), \quad (8)$$

avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} = \\ &= -\sin \theta \cdot \frac{\pm 2}{(1+r)^2 \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}} (\cos \theta \mp \sqrt{r^2 - \sin^2 \theta}). \end{aligned} \quad (9)$$

Această derivată se poate anula pentru $r = 1$, caz pe care l-am studiat, sau pentru $\theta = 0$ sau π (caz unidimensional) când obținem :

$$f_m = \frac{4r}{(1+r)^2} = 4m_1 m_2 : (m_1 + m_2), \quad (10)$$

care este maxim pentru $r = 1$ ($m_1 = m_2$) când $f_{\max} = 1$.

1.4.89. $M = 3m/2 = 300$ g.



$$1.4.90. \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = (m_1 + m_2) v_1 \operatorname{tg} \alpha : [(m_1 - m_2) v_1 - 2m_2 v_2] = -\sqrt{3}/6, \theta = 134^\circ.$$

$$1.4.91. v_2' = \sqrt{2gh} : \sqrt{M^2/m^2 + M/m} = 0,44 \text{ m/s.}$$

$$1.4.92. d = 2\sqrt{(H-h)h(1+m/M)} = 2,00 \text{ m.}$$

$$1.4.93. h' = hM^2 : (M+m)^2 = 0,64 \text{ m.}$$

$$1.4.94. v = \sqrt{v_0^2 [1 - mM : (m+M)^2] - 2gR} = 2,0 \text{ m/s.}$$

$$1.4.95. h = Rm/M = 10 \text{ cm.}$$

$$1.4.96. s = \pi l^2 / (16h) = 40 \text{ cm.}$$

$$1.4.97. v_1' = v_1 \sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2} : (m_1 + m_2) = 8,7 \text{ m/s, } v_2' = v_1 m_1 : (m_1 + m_2) = 4,0 \text{ m/s.}$$

$$1.4.98. v_1' = v_1 \sqrt{1 - m_1/m_2} = 4,0 \text{ m/s, } v_2' = v_1 m_1/m_2 = 1,8 \text{ m/s.}$$

$$1.4.99. \operatorname{tg} \alpha' = v_1 \sin \alpha : (v_1 \cos \alpha + 2v_2 \cos \beta) = 0,634, \alpha' = 32^\circ 22',$$

$$v_1' = [v_1^2 + 4v_2^2 \cos^2 \beta + 4v_1 v_2 \cos \alpha \cos \beta]^{1/2} = 3,03 \text{ m/s.}$$

$$1.4.100. v_1' = [(v_1 - v_2)^2 + v_2^2 + 2(v_1 - v_2)v_2 \cos 2\alpha]^{1/2} = 14,1 \text{ m/s,}$$

$$\operatorname{tg} \beta = (v_1 - v_2) \sin 2\alpha : [v_2 + (v_1 - v_2) \cos 2\alpha] = 1,00, \beta = 45^\circ.$$

$$1.4.101. v_1 = \sqrt{2Em_2 : [m_1(m_1 + m_2)]} = 2,0 \text{ m/s, } v_2 = 1,0 \text{ m/s.}$$

$$1.4.102. \langle f \rangle = \frac{2m}{\Delta t} [2gh + (2k/m)(\sqrt{l_0^2 + h^2} - l_0)^2]^{1/2} = 0,60 \text{ kN.}$$

$$1.4.103. x = -F_f/k + \left[F_f^2/k^2 + \frac{1}{k} m^2 v_0^2 : (m+M) \right]^{1/2} = 4,1 \text{ cm.}$$

$$1.4.104. v_2' = \sqrt{2\mu g [\mu g + 4m/k]} = 2,2 \text{ m/s.}$$

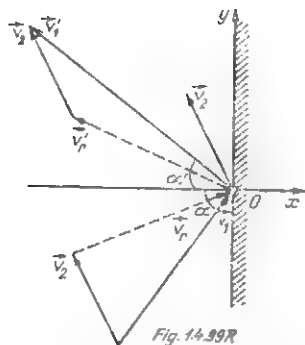


Fig. 1.4.99R

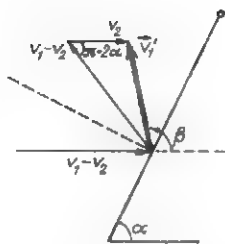


Fig. 1.4.100R

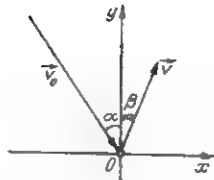


Fig. 1.4.105R

1.4.105. $v = -v_0 \cos 2\alpha : (2 \cos \alpha \cos \beta)$, (β trebuie ales), ($v'_0 = v_0 \tan \alpha$).

** 1.4.106. $F = At = ma = m \frac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele și integrăm:

$$mdv = Atdt, \int mdv = \int Atdt, mv = \frac{1}{2} At^2 + C, \quad (2)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = v_0$: $mv_0 = C$, $mv = \frac{1}{2} At^2 + mv_0$,

$$v = v_0 + \frac{1}{2m} At^2. \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{v_0}^v mdv = \int_0^t Atdt, \quad m(v - v_0) = \frac{1}{2} At^2.$$

Dealtfel aceasta nu este altceva decât teorema variației impulsului punctului material.

Continuăm integrarea:

$$dx = vdt, \quad \int dx = x = \int \left(v_0 + \frac{1}{2m} At^2 \right) dt = v_0 t + \frac{1}{6m} At^3 + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 0$,

$$x = v_0 t + \frac{1}{6m} At^3. \quad (4)$$

** 1.4.107. Forța de apăsare se compune din forța „statică” a porțiuni de lanț deja existente pe masă $\frac{m}{l} xg$ plus o contribuție „dinamică” dată

de variația de impuls pe unitatea de timp $\frac{dm \cdot v}{dt}$. Dar $dm = \frac{m}{l} dx$, atunci

$$\begin{aligned} F &= \frac{mg}{l} x + \frac{m}{l} \frac{dx}{dt} v = \frac{mg}{l} (x + v^2/g) = \frac{mg}{l} \left(\frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{g} g^2 t^2 \right) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{m}{l} g^2 t^2, \text{ pentru } t < \sqrt{2l/g}. \end{aligned} \quad (1)$$

în momentul final :

$$F_m = 3mg. \quad (2)$$

Impulsul transmis în timpul dt de elementul de masă dm :

$$dp = dm \cdot v = \frac{m}{l} dx \cdot v = \frac{m}{l} \sqrt{2gx} dx. \quad (3)$$

Integrăm :

$$p = \int dp = \frac{m}{l} \int_0^l \sqrt{2gx} dx = \frac{m}{l} \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^l = \frac{2}{3} m \sqrt{2gl}. \quad (4)$$

1.5. Momentul cinetic

1.5.1. $h = l \mu_1 (\operatorname{tg} \alpha + \mu_2) \sin \alpha : (1 + \mu_1 \mu_2) = 0,99 \text{ m}.$

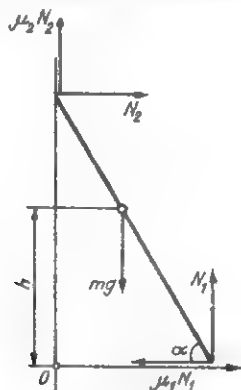


Fig. 1.5.1R

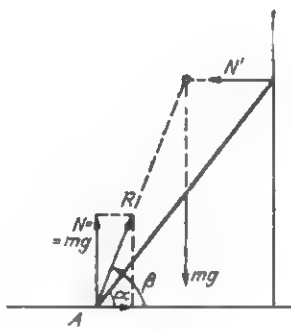


Fig. 1.5.3R

1.5.2. $T = \frac{mg}{4} \operatorname{ctg} \alpha = 84,9 \text{ N}.$

1.5.3. $R = \frac{mg}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 40,8 \text{ N}, \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha, \beta = 73^\circ 54'.$

1.5.4. $\operatorname{tg} \alpha = a/b + 1/\mu = 3,00, \alpha = 71^\circ 34'.$

1.5.5. $R = m \sqrt{g^2 + (4\pi^2 n^2 l \sin \alpha)^2} = 22 \text{ N}; \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{g} 4\pi^2 n^2 l \sin \alpha = 2,0,$
 $\beta = 63^\circ 36', M = ml \sin \alpha (4\pi^2 n^2 l \cos \alpha - g) = 12,2 \text{ N.m}; T = 2\pi \sqrt{l \cos \alpha / g} = 1,87 \text{ s}.$

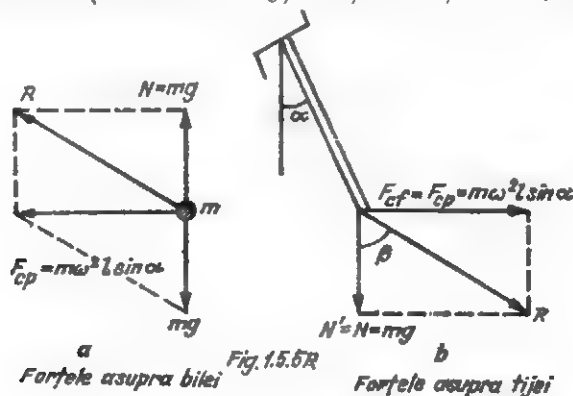


Fig. 1.5.5R

a
Forțele asupra bilei

b
Forțele asupra tijei

1.5.6. $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2} (m_1 d_1 + m_2 d_2) : (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) - \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$ (pendulul conic).

1.5.7. $N = 4m_1 m_2 g : (m_1 + m_2) = 29,4 \text{ N}$.

1.5.8. $F = (\sqrt{2} - 1) \mu mg = 0,81 \text{ N}$, $x = l/\sqrt{2} = 0,71 \text{ m}$.

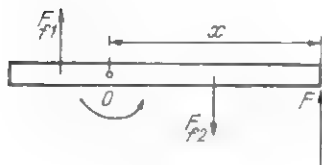


Fig 15.8R

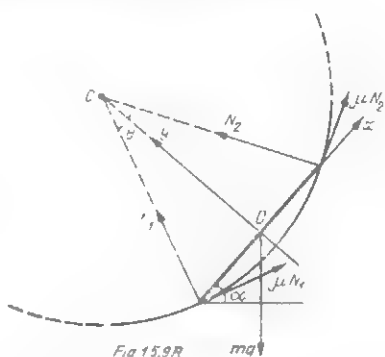


Fig 15.9R

1.5.9. $\tan \alpha = \mu : \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \mu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2\mu : [1 - \mu^2 + (1 + \mu^2) \cos \theta]$,

$\alpha = 15^\circ 7'$.

1.5.10. $k = C/R^2 = 10 \text{ N/m}$.

1.5.11. Se conservă numai direcția lui \vec{L} , deci traiectoria rămâne plană.

1.5.12. a) Zero, b) $|d\vec{L}/dt| = |\vec{M}| = mgl \sin \theta$.

1.5.13. $L = m v_0 s \sin \alpha = 1,00 \text{ J}\cdot\text{s}$; \vec{L} față de orice punct de pe normala în punctul de ciocnire se conservă în procesul ciocnirii.

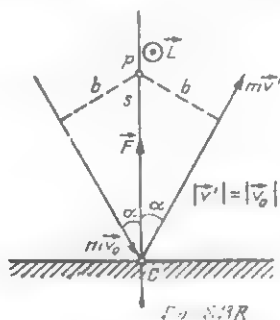


Fig 15.13R

* 1.5.14. Momentul \vec{M} are componentele: $\vec{M} (0, 0, -mgx)$. Se poate obține direct sau din

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}(-mgx) = -\vec{k} mg v_0 t \cos \alpha_0; \quad (1)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt; \quad (2)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} gt^2; \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{L} - \vec{r} \times m \dot{\vec{c}} - m \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\vec{k} \frac{1}{2} m g l^2 v_0 \cos \alpha_0. \quad (4)$$

Se verifică: $M_z = \frac{d}{dt} L_z$ (celelalte componente sînt nule). (5)

* 1.5.15.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \theta & R \sin \theta & -l \cos \alpha \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \vec{i}(-mgR \sin \theta) + \vec{j} mgR \cos \theta = \\ &= mgl \sin \alpha (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta), \\ \vec{M} &\text{este pe direcția vitezei } \vec{c} = \omega R (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta), \\ |\vec{M}| &= mgl \sin \alpha = 0,76 \text{ N.m.} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} &= m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \theta & R \sin \theta & -l \cos \alpha \\ -v \sin \theta & v \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= mrl(\vec{i} \cos \alpha \cos \theta + \vec{j} \cos \alpha \sin \theta + \vec{k} \sin \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

$$|\vec{L}| = mrl = ml \sin \alpha \sqrt{gl \cos \alpha} = 0,33 \text{ J.s,} \quad (9)$$

căci $mgl \tan \alpha = mv^2/R = mv^2(l \sin \alpha), \quad v^2 = gl \sin^2 \alpha \cos \alpha. \quad (10)$

Ținînd seama că $\frac{d}{dt} \cos \theta = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\sin \theta \cdot \omega, \quad \frac{d}{dt} \sin \theta = \cos \theta \cdot \omega$ (11)

și că *lex secunda* dă $mv\omega = mg \tan \alpha,$ (12)
rezultă imediat:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ pe componente: } M_x = \dot{L}_x, M_y = \dot{L}_y, M_z = \dot{L}_z \equiv 0. \quad (13)$$

1.5.16. Forțele \overline{mg} și \vec{N} sînt incidente cu diametrul vertical, deci $M_{||} = 0$ și $L_{||} = \text{const.}$

1.5.17. $\vec{L} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times m \vec{v}_0, \quad L = mv_0 d, \quad (d = \text{sistanța dintre drepte}).$

$$1.5.18. \quad n_2 - n_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} = 4,0 \text{ rot/s,} \quad W = \frac{m}{2} 4\pi^2 n_1^2 l_1^2 (l_1^2/l_2^2 - 1) = 2,12 \text{ J.}$$

* 1.5.19. Forța rezultantă \vec{T} fiind centrală, momentul cinetic \vec{L} față de centru se conservă, deci *imediat* după arderea firului viteza nu se schimbă și energia cinetică se conservă ($\vec{T} \perp \vec{r}$). Se schimbă brusc tensiunea din firul superior și deoarece pe direcția radială inițial $T_0 = mv^2/r$, iar final $T = mv^2/R, \quad T < T_0$, raza de curbura a traiectoriei crește brusc (scade și accelerația normală).

Inițial:

$$T_0 = (m_1 + m_2)g = mv^2/r. \quad (1)$$

Final, pentru corpul m_1 :

$$T = m_1 g = m_1 \ddot{r}, \quad (2)$$

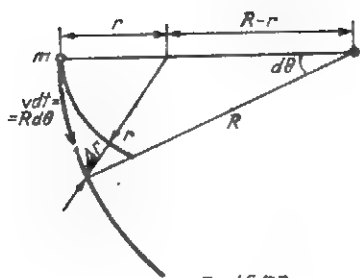


Fig. 15.19 R

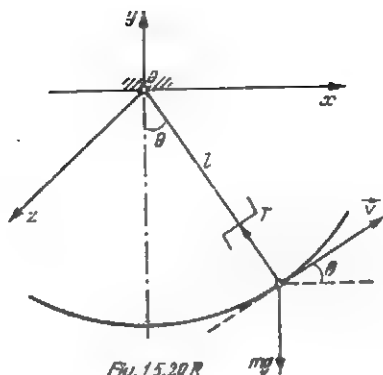


Fig. 15.20 R

pentru corpul m :

$$T = mv^2/R. \quad (3)$$

În SR neinertial rotit în jurul centrului O solidar cu particula m , avem pe direcție radială spre centru:

$$T - mv^2/r = -m\ddot{r}, \quad (4)$$

unde mv^2/r este „forța complementară de transport” centrifugă, iar \ddot{r} este accelerația radială centrifugă.

Scoțînd din (1) și (2) mv^2/r și \ddot{r} , și introducînd în (4), găsim

$$T = m_1 g(m + m_1 + m_2) : (m + m_1) = 0,245 \text{ N}. \quad (5)$$

De asemenea, din (3) și (4) rezultă accelerația

$$\ddot{r} = v^2/r - v^2/R, \quad (6)$$

care se poate calcula și direct astfel (vd. figura):

$$r + \Delta r = \sqrt{R^2 + (R-r)^2 - 2R(R-r)\cos d\theta}.$$

Mărimea Δr este de ordinul doi infinitesimal, deaceia $\cos d\theta$ trebuie dezvoltat pînă la ordinul doi:

$$\cos d\theta = 1 - \frac{1}{2} d\theta^2.$$

Atunci rezultă

$$\Delta r = \sqrt{r^2 + R(R-r) d\theta^2} - r = r \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} R(R-r) d\theta^2} - r.$$

și aproximînd radicalul cu formula cunoscută

$$(1+x)^p \cong 1 + px, \quad p \in \mathbb{R}, \quad |x| \ll 1, \quad (\text{la noi } p = 1/2), \quad (7)$$

găsim ($Rd\theta = vdt$):

$$\Delta r = \frac{1}{2r} R(R-r) d\theta^2 = \frac{1}{2} \frac{R-r}{Rr} v^2 dt^2.$$

Identificînd cu dezvoltarea lui Δr :

$$\Delta r = \dot{r} dt + \frac{1}{2!} \ddot{r} dt^2 + \dots,$$

găsim

$$\dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = \frac{R-r}{Rr} v^2 \quad (8)$$

și deci în concordanță cu (6):

$$\ddot{r} = v^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \frac{R-r}{Rr} v^2. \quad (9)$$

Revenind la ecuațiile (3) și (1)

$$T = mv^2/R = \frac{m}{R} \cdot \frac{r}{m} (m_1 + m_2)g,$$

de unde, folosind și (5), rezultă:

$$\frac{R}{r} = \frac{(m_1 + m_2)g}{T} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m + m_1}{m + m_1 + m_2} = 1,6. \quad (10)$$

* 1.5.20. $\vec{M}(0, 0, -mgl \sin \theta),$ (1)

ceea ce se poate obține direct sau din

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \sin \theta & -l \cos \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-mgl \sin \theta). \quad (2)$$

(Tensiunea T nu dă moment față de punctul de suspensie — are brațul zero).

$$\vec{L}(0, 0, mvl), \quad (3)$$

ceea ce se poate obține direct sau din

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \sin \theta & -l \cos \theta & 0 \\ v \cos \theta & v \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} mvl. \quad (4)$$

Ținând seama că $m \frac{dv}{dt} = F_t$ dă în cazul nostru

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta, \quad (5)$$

avem

$$M_z = \frac{d}{dt} L_z, \text{ (celelalte componente sînt nule).} \quad (6)$$

1.6. Mecanica rigidului

1.6.1. Vd. figura, $\langle v \rangle = 3\omega l/\pi$.



Fig. 1.6.1R

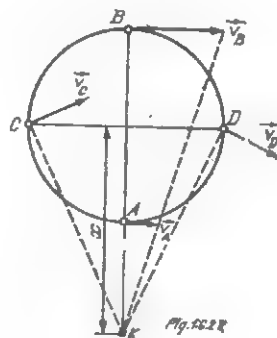


Fig. 1.6.2R

$$1.6.2. \quad v_C = v_D = \sqrt{(v_A^2 + v_B^2)/2};$$

$$v_{Cx} = v_{Dx} = (v_A + v_B)/2, \quad v_{Cy} = -v_{Dy} = (v_B - v_A)/2.$$

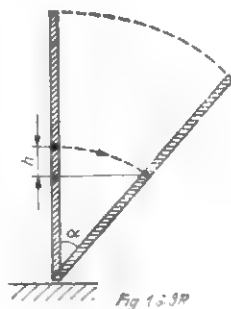
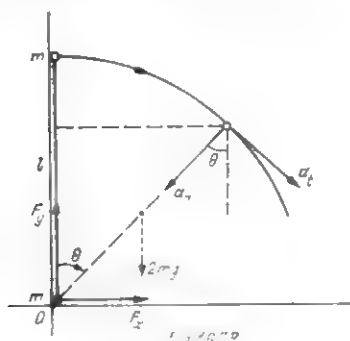
1.6.3. $v_C = \omega(R + \sqrt{R^2 - b^2/4})$ maximă, $v_D = -\omega(R - \sqrt{R^2 - b^2/4})$ minimă.

$$1.6.4. \quad T_1 = gm_1(2m_2 + m) : (m_1 + m_2 + m) = 3,6 \text{ N}, \quad T_2 = gm_2(2m_1 + m) : (m_1 + m_2 + m) = 4,0 \text{ N}.$$

$$1.6.5 \quad v' = \sqrt{v^2(1 - h/R)^2 - gh} = 8,9 \text{ m/s}; \quad v_{\min} = \sqrt{gh} \cdot R / (R - h) = 1,10 \text{ m/s}.$$

$$1.6.6. \quad v = r\sqrt{g/b} = 3,1 \text{ cm/s}.$$

* 1.6.7. Conservarea energiei:



$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (\omega l)^2,$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{2g}{l} (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Prin derivare în raport cu timpul:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{2g}{l} \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \text{ dar } \dot{\omega} = \epsilon, \dot{\theta} = \omega,$$

de unde rezultă

$$\epsilon = \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (2)$$

Accelerațiile CM al halterei:

$$a_n = \omega^2(l/2) = g(1 - \cos \theta),$$

$$a_t = \epsilon(l/2) = \frac{g}{2} \sin \theta. \quad (3)$$

Forțele care acționează asupra halterei ($\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$):

$$F_x = ma_x = ma_n \sin \theta + ma_t \cos \theta = \frac{1}{2} mg \sin \theta (3 \cos \theta - 2), \quad (4)$$

$$F_x = 0 \text{ pentru } \theta > \arccos \frac{2}{3},$$

$$F_y = 2mg - ma_y = -ma_n \cos \theta - ma_t \sin \theta = \frac{1}{2} mg(-1 - 2 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta),$$

$$F_y = \frac{1}{2} mg(3 - 2 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta). \quad (5)$$

$$1.6.8. t \cong N 2\sqrt{2l/(3g)} = 10,4 \text{ s.}$$

$$1.6.9. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot M : (2M + m).$$

$$1.6.10. E_c = \frac{1}{2} l^2 \omega^2 m_1 m_2 : (m_1 + m_2) = 6,0 \text{ J.}$$

$$1.6.11. T = (m_1 + m_2)g - (m_1 s_1 + m_2 s_2)^2 g : (m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2) = 5,88 \text{ N} - 5,61 \text{ N.}$$

1.7. Echilibrul mecanic

$$1.7.1. T_2 = G\sqrt{n^2 - 1} = 173 \text{ N.}$$

$$1.7.2. N_1 = mg \sin \beta : \sin(\beta - \alpha) = 170 \text{ N}, N_2 = mg \sin \alpha : \sin(\beta - \alpha) = 98,1 \text{ N.}$$

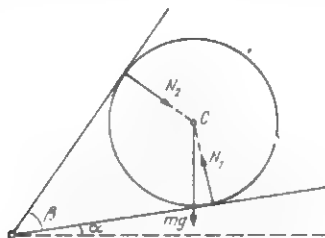


Fig. 1.2.9

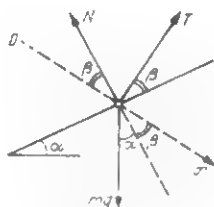


Fig. 1.2.10

$$1.7.3. N = mg \cos(\alpha + \beta) : \cos \beta = 8,00 \text{ N.}$$

$$1.7.4. F_A = mg \sin \alpha : (1 + \sin \alpha) = 1,00 \text{ N.}$$

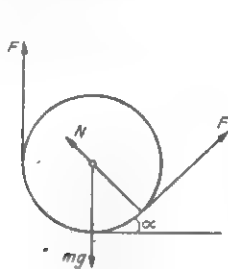


Fig. 1.7.4R



a

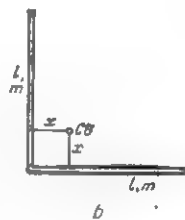


Fig. 1.7.6R

$$1.7.5. f = F(L + l)/l = 500 \text{ N.}$$

$$1.7.6. \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = 18^\circ 26'.$$

$$1.7.7. m = M(1 - 2f)/(2f) = 4,0 \text{ kg.}$$

$$1.7.8. k_1/k_2 = (l/2 - d) : (l/2) = \frac{1}{2}.$$



Fig. 1.7.7R

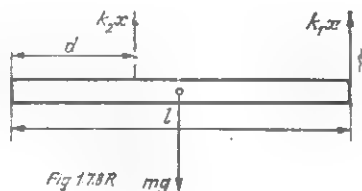
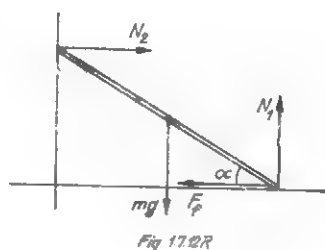
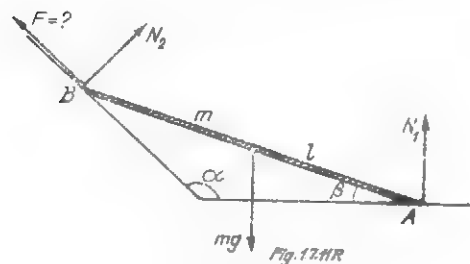


Fig. 1.7.8R

$$1.7.9. \operatorname{tg} \alpha = 1/(2\mu), \quad \alpha \geq 45^\circ.$$

$$1.7.10. T = mg \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot l / (2h) = 150 \text{ N}.$$

$$1.7.11. F = \frac{mg}{2} \sin \alpha = 9,8 \text{ N}.$$



$$1.7.12. F_f = \frac{1}{2} mg \operatorname{ctg} \alpha = 50 \text{ N}.$$

1.7.13. $F_{\min} = \mu_2 mg$ la înălțimea $h = b/(2\mu_2)$ dacă $h \leq H$,
 altfel $h = H$, $F_{\min} = \frac{1}{2} mgb(\mu_1 + \mu_2) : [b + (\mu_1 - \mu_2)H]$.

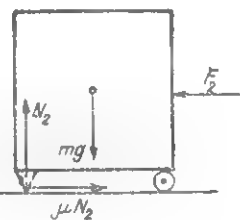
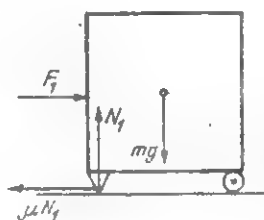
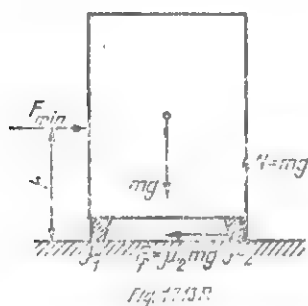
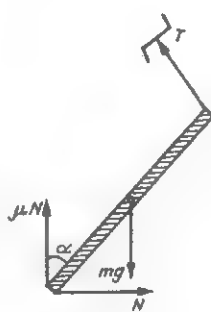
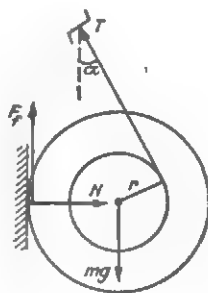
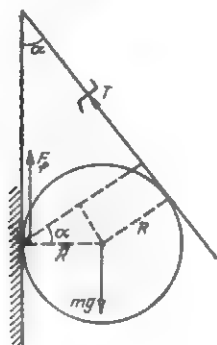


Fig. 1.7.14R.

$$1.7.14. m = \frac{2}{g} F_1 F_2 : (F_2 - F_1).$$

$$1.7.15. T = mg : (1 + \cos \alpha), \quad \mu \geq 1/\sin \alpha.$$

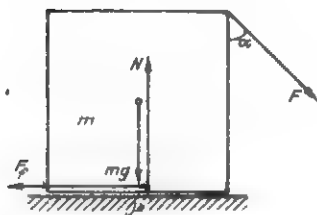
$$1.7.16. \mu = r \operatorname{tg} \alpha : (R + r) = 0,30.$$



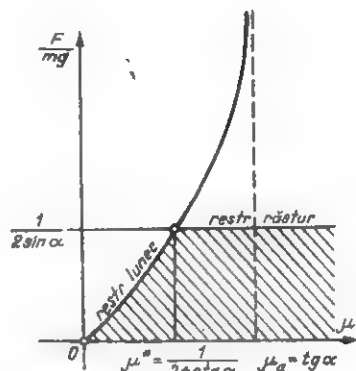
1.7.17. $\alpha \leq \arcsin \frac{r}{\mu R} = 30^\circ$.

1.7.18. $\operatorname{tg} \alpha = 3/\mu = 10$, $\alpha \geq 84^\circ$.

1.7.19. Vd. figura.



a



b

Fig. 17.19R

1.7.20. $m_{1,2} = \frac{M}{2} (1 \pm 2\sqrt{\Delta l/(l + 2\Delta l)}) = 150 \text{ g și } 50 \text{ g}$.

1.7.21. $l < d/\cos \varphi \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \varphi^2\right) = 1012,5 \text{ mm}$.

1.7.22. a) $h \leq b$, $m \geq \mu M : (1 - \mu)$, $\mu < 1$; b) $h > b$, $\mu M : (1 - \mu) \leq m \leq M(b/2) : (h - b)$, $\mu < b : (2h - b)$.

1.7.23. $F = mg\sqrt{2}/4$, $\mu = 1/3$.

1.7.24. Cubul superior se poate răsturna numai pentru $\operatorname{tg} \alpha \geq 1$, iar ambele cuburi pentru $\operatorname{tg} \alpha \geq 1/2$. Pentru $\mu < \frac{1}{2}$ întâi lunecă cubul superior la unghiul planului $\alpha = \arcsin \mu$. Dacă $\mu > \frac{1}{2}$ se răstoarnă ambele cuburi la $\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = 26^\circ 34'$.

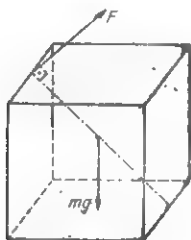


Fig. 17.23R

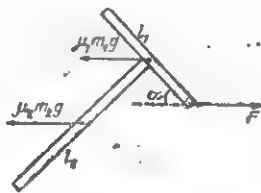


Fig. 17.24R



Fig. 17.25R

1.7.25. $\mu \leq b : \sqrt{4R^2 - b^2} = 0,050$.

1.7.26. $\operatorname{tg} \alpha = \mu_2 l_2 m_2 : (\mu_1 l_1 m_1)$.

1.7.27. $\operatorname{tg} \alpha = \mu_2 m_2 l_2 : [(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) l_1]$.

1.7.28. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (m_1 - m_2) : (m_1 + m_2)$, $\alpha = 9^\circ 28'$.

**** 1.7.29.** Luăm un element de lanț de masă dm care subîntinde un unghi la centru $d\theta$ (în radiani), deci are lungimea $ds = R d\theta$ și masa $dm = \frac{m}{l} ds = \frac{m}{l} R d\theta$. Scriem condiția de echilibru pe direcția tangențială :

$$(T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - dm g \cos \theta = 0 \text{ sau } dT - \frac{m}{l} R g \cos \theta d\theta = 0 \quad (1)$$

$\left(\cos \frac{d\theta}{2} = 1 \right)$ pe care o integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{T_0}^T dT = T - T_0 = \int_0^\theta \frac{m}{l} R g \cos \theta d\theta = \frac{m}{l} R g \int_0^\theta \cos \theta d\theta = \frac{m}{l} R g \sin \theta, \quad (2)$$

unde T_0 rezultă din condiția de echilibru pentru porțiunea de lanț care atâră :

$$2T_0 = \frac{m}{l} (l - \pi R) g. \quad (3)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$T = \int dT = \int \frac{m}{l} R g \cos \theta d\theta = \frac{m}{l} R g \sin \theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine ca pentru $\theta = 0$ să avem $T = T_0$, deci $T_0 = C$. Rezultă

$$T = \frac{1}{2} m g \left(1 + \frac{2R}{l} \sin \theta - \frac{\pi R}{l} \right) = \frac{1}{2} m g \left[1 - \frac{R}{l} (\pi - 2 \sin \theta) \right]. \quad (4)$$

Tensiunea este maximă pentru $\theta = \pi/2$:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m g \left[1 - (\pi - 2) \frac{R}{l} \right]. \quad (5)$$

Dacă $l = \pi R$, avem $T_0 = 0$ și

$$T = m g \frac{1}{\pi} \sin \theta, \quad T_{\max} = \frac{m g}{\pi}. \quad (6)$$

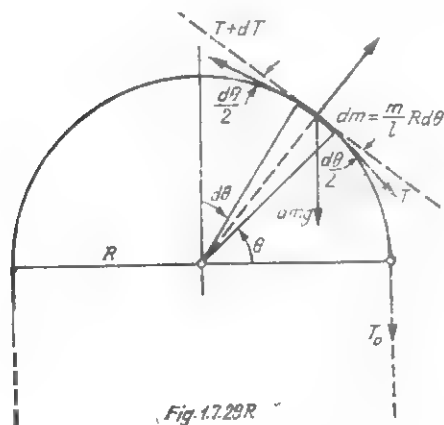


Fig. 1.7.29R

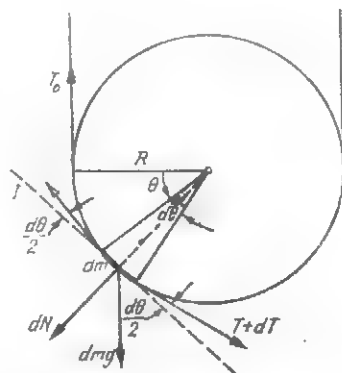


Fig 1.7.30R

**** 1.7.30.** Luăm un element de lanț de masă dm care subintinde un unghi la centru $d\theta$ (în radiani), deci are lungimea $ds = R d\theta$ și masa $dm = \frac{m}{l} ds = \frac{m}{l} R d\theta$. Condiția de echilibru pe direcția tangențială :

$$(T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + dm g \cos \theta = 0 \text{ sau } \left(\cos \frac{d\theta}{2} = 1 \right) :$$

$$dT = -\frac{m}{l} g R \cos \theta d\theta, \quad (1)$$

pe care o integrăm (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{T_0}^T dT = T - T_0 = -\frac{m}{l} g R \int_0^\theta \cos \theta d\theta = -\frac{mg}{l} R \sin \theta, \quad (2)$$

unde T_0 rezultă din condiția de echilibru :

$$2T_0 = Mg + \frac{m}{l} \pi R g. \quad (3)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$T = \int dT = -\frac{m}{l} g R \int \cos \theta d\theta = \frac{m}{l} g R \sin \theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine ca pentru $\theta = 0$ să avem $T = T_0$, deci $C = T_0$,

$$T = \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} mg \frac{R}{l} (\pi - 2 \sin \theta) \quad (4)$$

Tensiunea minimă ($\theta = \pi/2$) :

$$T_{\min} = \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} mg \frac{R}{l} (\pi - 2). \quad (5)$$

Pentru lungimea minimă a lanțului $l = \pi R + 2R$, av

$$T = \frac{1}{2} Mg + \frac{mg}{2(\pi + 2)} (\pi - 2 \sin \theta) \quad (6)$$

și are valoarea minimă :

$$T_{\min} = \frac{1}{2} Mg + \frac{1}{2} mg \frac{\pi - 2}{\pi + 2}.$$

**** 1.7.31.** Luăm un element de tijă de lungime dx și de masă dm situat la distanța x de axă. Momentul de inerție al acestui element de masă este

$$dI = dm \cdot x^2 = \frac{m}{l} dx \cdot x^2, \quad \left(dm = \frac{m}{l} dx \right). \quad (1)$$

Integrăm :

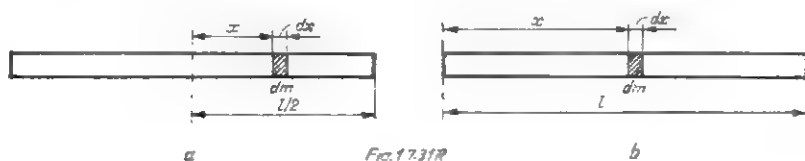


Fig. 1.7.31 R

a) Față de axa centrală :

$$I_o = \int dI = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l} 2 \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (2)$$

b) Față de axa marginală :

$$I = \int dI = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} ml^2. \quad (3)$$

Teorema lui Steiner (vd. Breviarul) se verifică imediat :

$$I = I_o + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

** 1.7.32. a) $I_x = \int dm \cdot y^2$, $I_y = \int dm \cdot x^2$, $I_z = \int dm (x^2 + y^2)$. (1)

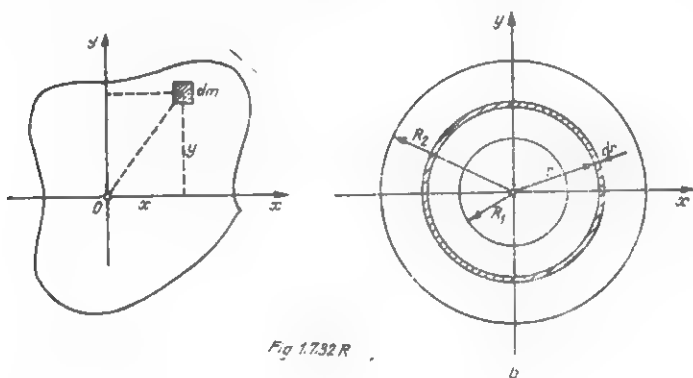


Fig. 1.7.32 R

Se vede imediat că :

$$I_z = \int dm \cdot x^2 + \int dm \cdot y^2 = I_y + I_x. \quad (2)$$

b) Din cauza simetriei momentul de inerție față de oricare diametru este același, deci $I_x = I_y$, dar $I_x + I_y = I_z$, rezultă

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z. \quad (3)$$

Să calculăm pe I_z . Pentru aceasta vom profita de simetria circulară a figurii plane. Alegem la distanța r de centru o coroană circulară elementară, infinit de subțire (ca un fir) de grosime dr . Foarte punctele materiale ale acestei coroane infinitesimale au aceeași distanță r față de axa Oz , deci momentul de inerție al acestei coroane elementare va fi

$$dI_z = dm \cdot r^2, \quad (4)$$

unde dm este masa coroanei elementare. Să calculăm aria acestei coroane, care poate fi privită ca o bandă (fășie) de lungime $2\pi r$ și lățime dr :

$$dS = 2\pi r dr. \quad (5)$$

Aceeași expresie poate fi obținută privind pe dS ca o creștere infinitesimală a ariei cercului $S = \pi r^2$ datorită creșterii razei cu dr , deci prin diferențierea lui $S = \pi r^2$:

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr.$$

În sfârșit putem privi pe dS ca diferența dintre aria cercului de rază $r + dr$ și aria cercului de rază r :

$$dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2 \rightarrow 2\pi r dr,$$

deoarece ultimul termen cu $(dr)^2$ dispăre față de primul termen dr , fiind un infinit mic de ordin superior.

Acum exprimăm pe dm :

$$dm = -\frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} dS = -\frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot 2\pi r dr. \quad (6)$$

Integrăm (4):

$$I_z = \int dm \cdot r^2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi r dr \cdot r^2 = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ = \frac{1}{2} \frac{m}{R_2^2 - R_1^2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2), \quad (6)$$

apoi

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m(R_1^2 + R_2^2). \quad (7)$$

Cazuri particulare: inel subțire omogen (cerc de butoi) de masă m și rază $R = R_1 = R_2$:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_z = mR^2. \quad (8)$$

Expresia lui I_z de aici este evidentă, deoarece toate punctele materiale sînt la aceeași distanță R de axa Oz .

Disc subțire omogen de rază $R = R_2, R_1 = 0$:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2, \quad I_z = \frac{1}{2} mR^2. \quad (9)$$

** 1.7.33. Față de axa Oy figura se descompune în două tije subțiri de lungime a , paralele cu axa Ox plus două tije subțiri de lungime b paralele cu Oy . Momentul de inerție este o mărime aditivă, adică

$$I = \int_{V_1+V_2} dm R^2 = \int_{V_1} dm R^2 + \int_{V_2} dm R^2 = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Știind că pentru o tijă subțire omogenă de masă m și lungime l , față de axa sa centrală transversală: $I = \frac{1}{12} ml^2$ (vd. problema 1.7.31), rezultă pentru cadrul nostru:

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \frac{m}{2(a+b)} a \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{m}{2(a+b)} b \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m \frac{a^2(a+3b)}{a+b}. \quad (2)$$

Schimbînd a cu b , rezultă

$$I_x = \frac{1}{12} m \frac{b^2(b+3a)}{a+b}. \quad (3)$$

Fiind figură plană (vd. problema 1.7.32):

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m(a+b)^2. \quad (4)$$

În cazul pătratului ($a = b$):

$$I_x = I_y = \frac{1}{6} ma^2, I_z = \frac{1}{3} ma^2. \quad (5)$$



Fig. 17.33R

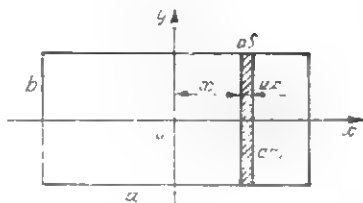


Fig. 17.34R

**** 1.7.34.** Să calculăm momentul de inerție față de axa Oy din figură. Alegem elementul de masă dm sub forma unei fâșii infinite de subțiri de grosime dx situată la distanța x de axa Oy : $dS = bdx$,

$$dm = \frac{m}{ab} dS = \frac{m}{ab} bdx = \frac{m}{a} dx. \quad (1)$$

Atunci

$$I_y = \int dm x^2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{m}{a} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m}{a} x^3 \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{12} ma^2. \quad (2)$$

Rezultatul se putea scrie dintr-o dată dacă cunoaștem momentul de inerție al unei tije subțiri (vd. problema 1.7.31). În adevăr, față de axa Oy avem un sistem de tije subțiri de lungime a situate paralel cu axa Ox .

Analog,

$$I_x = \frac{1}{12} mb^2. \quad (3)$$

Cunoscând de la problema 1.7.32 că pentru o figură (placă) plană: $I_x + I_y = I_z$, găsim față de Oz (perpendiculară pe placă):

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad (4)$$

**** 1.7.35.** Vom folosi rezultatul de la problema precedentă. În raport cu axa Oz paralelipipedul apare ca o sumă de plăci subțiri, paralele cu Oxy , avînd momentul de inerție

$$dI_z = \frac{1}{12} dm(a^2 + b^2), \text{ deci}$$

$$I_z = \int dI_z = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) \int dm = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad (1)$$

Permutînd a, b, c , găsim evident:

$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2), I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2). \quad (2)$$

În particular pentru un cub:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6} ma^2, \quad (3)$$

pentru o placă subțire dreptunghiulară $a, b, c = 0$:

$$I_x = \frac{1}{12} m b^2, I_y = \frac{1}{12} m a^2, I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \quad (4)$$

și pentru o tijă subțire omogenă $a, b = 0, c = 0$:

$$I_x = 0, I_y = I_z = \frac{1}{12} m a^2. \quad (5)$$

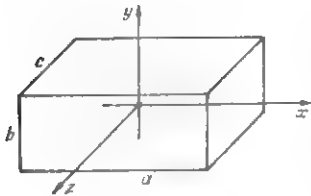


Fig. 17.56R

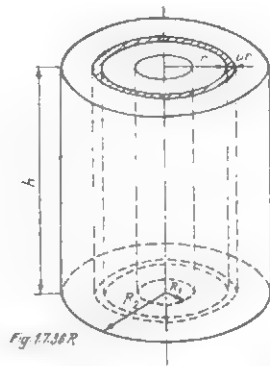


Fig. 17.58R

**** 1.7.36.** Profităm de simetria cilindrică și vom alege o pătură cilindrică elementară, infinit de subțire (ca o foiță cilindrică) de rază r și grosime dr . Foarte particulare acestei pături infinitezimale sînt la aceeași distanță r de axă, deaceia momentul de inerție al acestei pături elementare de masă dm va fi: $dI = dm \cdot r^2$.

Să calculăm volumul dV al păturii elementare, care poate fi privită ca o pătură infinit de subțire de arie $2\pi r h$ și grosime dr :

$$dV = 2\pi r h dr. \quad (1)$$

Același rezultat se poate obține considerind pătura infinitezimală ca o creștere infinit mică a volumului cilindrului de rază r : $V = \pi r^2 h$ datorită creșterii infinitezimale a razei sale cu dr , deci se obține prin diferențiere:

$$dV = d(\pi r^2 h) = 2\pi r h dr.$$

În sfîrșit putem considera pătura elementară ca diferența dintre volumul cilindrului de rază $r + dr$ și volumul cilindrului de rază r :

$$dV = \pi(r + dr)^2 h - \pi r^2 h = 2\pi r h dr + \pi(dr)^2 h \rightarrow 2\pi r h dr,$$

deoarece termenul cu $(dr)^2$ este un infinit mic de ordin superior față de termenul liniar cu dr și se anulează.

Integrăm pe volumul păturii cilindrice date (ρ — densitatea):

$$dI = dm \cdot r^2 = \rho dV r^2 = \rho 2\pi r h dr \cdot r^2,$$

$$I = \int dI = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \rho 2\pi h \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4). \quad (2)$$

Dar

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{h\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (3)$$

deci

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2). \quad (4)$$

Rezultatul coincide cu cel de la inel sau coroană circulară, fiindcă în adevăr, în raport cu axa sa cilindrul este o suprapunere de inele.

Cazuri particulare : a) Pătură cilindrică omogenă foarte *subțire* de masă m și rază $R = R_1 = R_2$ (cerc de butoi) :

$$I = mR^2, \quad (5)$$

rezultat evident, deoarece în acest caz toate particulele se află la aceeași distanță R de axă.

b) Cilindru omogen *plin* de masă m și rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \quad (6)$$

rezultat identic cu cel de la cerc sau disc plin, deoarece cilindrul plin, în raport cu axa sa, este o suprapunere de cercuri pline sau discuri.

**** 1.7.37.** Momentul de inerție căutat, datorită simetriei sferice, evident, nu depinde de diametrul ales, fiind același pentru orice diametru. Alegem 3 axe ortogonale cu originea în centrul păturii sferice, atunci față de aceste axe :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{3} (I_x + I_y + I_z). \quad (1)$$

Distanțele unui element dm , avind coordonatele (x, y, z) pînă la axele de coordonate sînt respectiv (conform teoremei lui Pitagora) :

$$\sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{z^2 + x^2}, \sqrt{x^2 + y^2},$$

astfel încît

$$I_x = \int dm(y^2 + z^2), \quad I_y = \int dm(z^2 + x^2), \quad I_z = \int dm(x^2 + y^2) \quad (2)$$

și atunci (1) dă

$$I = I_x = I_y = I_z = \frac{1}{3} \int dm \cdot 2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{3} \int dm \cdot r^2, \quad (3)$$

unde r este distanța elementului dm pînă la centrul păturii sferice. Vom profita acum de simetria sferică pentru a alege convenabil elementul de masă dm și anume sub forma unei pături sferice elementare, infinit de subțiri, de rază r și grosime dr (ca un balon de săpun) : $dm = \rho dV$. Volumul acestei pături sferice infinitezimale se poate obține înmulțind aria sa $4\pi r^2$ cu grosimea dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (4)$$

Același rezultat se obține privind volumul păturii sferice infinitezimale ca o creștere infinit mică a volumului sferei $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ datorită creșterii razei cu dr , deci prin diferențiere :

$$dV = d\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr$$

sau ca diferență dintre volumul sferei $\frac{4}{3} \pi (r + dr)^3$ și al sferei $\frac{4}{3} \pi r^3$:

$$dV = \frac{4\pi}{3} (r + dr)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3 = 4\pi r^2 dr + 4\pi r(dr)^2 + \frac{4}{3} \pi (dr)^3 \rightarrow 4\pi r^2 dr,$$

deoarece ceilalți termeni sînt infiniți mici de ordin superior care se anulează în raport cu termenul liniar cu dr .

Efectuăm integrarea în (2):

$$I = \frac{2}{3} \int \rho dV r^2 = \frac{2}{3} \rho \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^4 dr = \frac{8}{3} \pi \rho \frac{1}{5} (R_2^5 - R_1^5), \quad (5)$$

$$\text{dar } \rho = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}, \text{ deci } I = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}. \quad (6)$$

Cazuri particulare: Pătura sferică omogenă foarte subțire (balon de săpun) de masă m și rază $R = R_1 = R_2$: Descompunem în prealabil diferențele de puteri și simplificăm cu $R_2 - R_1$:

$$I = \frac{2}{5} m \frac{(R_2 - R_1)(R_2^4 + R_2^3 R_1 + R_2^2 R_1^2 + R_2 R_1^3 + R_1^4)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)}.$$

Acum rezultă imediat ($R_1 = R_2 = R$):

$$I = \frac{2}{3} m R^2. \quad (7)$$

Sferă omogenă plină de masă m și rază $R = R_2, R_1 = 0$:

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (8)$$

**** 1.7.38.** Problema dată reprezintă analogul *unghiular* al cazului *liniar* de la problema 1.2.147, deaceia urmăriți paralel rezolvările celor două probleme.

Ecuatia mișcării de rotație în jurul axei fixe

$$M - M_f = M - k\omega = I\epsilon = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (1)$$

Cînd se atinge turația limită (maximă) constantă, accelerația unghiulară ϵ se anulează, adică momentele se echilibrează (M_f egalează pe M):

$$M - k\omega_0 = 0, \quad k = \frac{M}{\omega_0} = \frac{M}{2\pi n_0}. \quad (2)$$

Separăm variabilele în (1) și integrăm:

$$dt = \frac{I d\omega}{M - k\omega} = \frac{I}{k} \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{I}{M} \omega_0 \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega},$$

$$\int dt = t = \int \frac{I}{M} \omega_0 \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega} = - \frac{I}{M} \omega_0 [\ln(\omega_0 - \omega) + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$

avem $\omega = 0$: $0 = \ln \omega_0 + C$, $C = -\ln \omega_0 = \ln \frac{1}{\omega_0}$,

$$t = \frac{I}{M} \omega_0 \ln \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega}, \quad \omega = \omega_0 (1 - e^{-Mt/I\omega_0}). \quad (3)$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^t dt = t = \int_0^{\omega} \frac{I}{M} \omega_0 \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega} = - \frac{I}{M} \omega_0 \ln(\omega_0 - \omega) \Big|_0^{\omega} = - \frac{I}{M} \omega_0 \ln \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}.$$

Punind în (3) $\omega = f\omega_0$, găsim timpul cerut :

$$t = \frac{I}{M} \omega_0 \ln \frac{1}{1-f} = 11,5 \text{ s.} \quad (4)$$

Continuăm integrarea :

$$\begin{aligned} d\theta &= \omega dt, \int d\theta = \theta = \int \omega_0 (1 - e^{-Mt/(I\omega_0)}) dt = \omega_0 t + \frac{I}{M} \omega_0^2 e^{-Mt/(I\omega_0)} + C', \\ \text{unde constanta } C' &\text{ se determină din condiția inițială : la } t = 0, \text{ avem} \\ \omega &= 0 \text{ și } \theta = 0 : \quad 0 = \frac{I}{M} \omega_0^2 + C', \quad C' = -\frac{I}{M} \omega_0^2, \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{I}{M} \omega_0^2 (e^{-Mt/(I\omega_0)} - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Introducând aici t din (3), obținem :

$$\theta = \frac{I}{M} \omega_0^2 \ln \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega} - \frac{I}{M} \omega_0 \omega. \quad (6)$$

Punind aici $\omega = f\omega_0$, găsim :

$$\theta = 2\pi N = \frac{I}{M} \omega_0^2 \left(\ln \frac{1}{1-f} - f \right) = 2\pi \cdot 180 \text{ rad.} \quad (7)$$

Este comod să găsim direct $\theta = f(\omega)$ în loc de $\theta = f(t)$. Pentru aceasta înmulțim ecuația (1) cu $d\theta = \omega dt$:

$$(M - k\omega) d\theta = I \frac{d\omega}{dt} d\theta = I \omega d\omega.$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{I \omega d\omega}{M - k\omega} = \frac{I}{M} \omega_0 \frac{\omega d\omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{I}{M} \omega_0 \frac{(\omega - \omega_0 + \omega_0) d\omega}{\omega_0 - \omega} = \\ &= \frac{I}{M} \omega_0 \left(-d\omega + \frac{\omega_0 d\omega}{\omega_0 - \omega} \right), \\ \int d\theta = \theta &= \int \frac{I}{M} \omega_0 (-d\omega) + \int \frac{I}{M} \omega_0^2 \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega} = \\ &= -\frac{I}{M} \omega_0 \omega - \frac{I}{M} \omega_0^2 [\ln(\omega_0 - \omega) + C''], \end{aligned}$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $\omega = 0$ și $\theta = 0$: $0 = \ln \omega_0 + C''$, $C'' = -\ln \omega_0$;

$$\theta = \frac{I}{M} \omega_0^2 \ln \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega} - \frac{I}{M} \omega_0 \omega. \quad (6)$$

Putem integra și nedefinit :

$$\begin{aligned} \int_0^\theta d\theta &= \int_0^\omega \frac{I}{M} \omega_0 \frac{\omega d\omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{I}{M} \omega_0 \int_0^\omega \left(-d\omega + \frac{\omega_0 d\omega}{\omega_0 - \omega} \right), \\ \theta &= \frac{I}{M} \omega_0 \left(-\omega - \omega_0 \ln \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Dacă ați urmărit analogia cu problema 1.2.147, mărimile care se corespund sînt $M \sim F$, $I \sim m$, $\theta \sim x$, $\omega \sim v$, $\varepsilon \sim a$.

**** 1.7.39.** a) Alegem elementul de masă dm sub forma unei fâșii infinit de subțiri (ca un fir) așezată la distanța x de axa de rotație și de grosime dx . Atunci momentul de inerție al acestei fâșii este

$$dI = dm \cdot x^2 = \frac{m}{bh} dS \cdot x^2 = \frac{m}{bh} x^2 h dx = \frac{m}{b} x^2 dx. \quad (1)$$

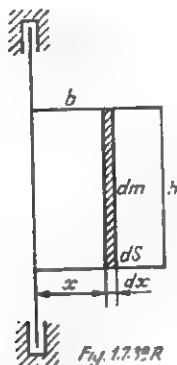


Fig. 1.7.39 R

Prin integrare obținem :

$$\int dI = I = \int_0^b \frac{m}{b} x^2 dx = \frac{1}{3} m b^2 = 16 \text{ g} \cdot \text{m}^2. \quad (2)$$

Rezultatul se poate obține imediat dacă știm momentul de inerție al unei tije subțiri față de axa transversală de la un capăt (problema 1.7.31). Atunci placa noastră apare ca un sistem de tije de lungime b așezate paralel

cu latura b : $dI = \frac{1}{3} dm \cdot b^2$ și însumind, găsim

$$I = \int dI = \frac{1}{3} b^2 \int dm = \frac{1}{3} m b^2.$$

b) Forța de rezistență asupra elementului dS :

$$dF_r = -k dS \cdot v^2 = -k h dx \omega^2 x^2, \quad (3)$$

momentul ei față de axa de rotație :

$$dM_r = x dF_r = -k \omega^2 h x^3 dx. \quad (4)$$

Prin integrare găsim momentul rezultat :

$$M_r = \int dM_r = -k \omega^2 h \int_0^b x^3 dx = -\frac{1}{4} k \omega^2 h b^4 = -K \omega^2. \quad (5)$$

Mai departe problema reprezintă analogul *unghiular* al cazului *liniar* din problema 1.2.145. Urmăriți în paralel rezolvarea acestor două probleme.

Ecuția mișcării de rotație în jurul axei fixe :

$$M = I \varepsilon = I \frac{d\omega}{dt}, \quad -K \omega^2 = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (6)$$

Separăm variabilele și integrăm

$$dt = -\frac{I}{K} \frac{d\omega}{\omega^2}, \quad \int dt = t = -\int \frac{I}{K} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{1}{K} \frac{1}{\omega} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } \omega = \omega_0 = 2\pi n_0 : 0 = \frac{I}{K} \frac{1}{\omega_0} + C, C = -\frac{I}{K\omega_0},$$

$$t = \frac{I}{K} (1/\omega - 1/\omega_0), \quad \omega = \frac{1}{1/\omega_0 + Kt/I} \quad (7)$$

sau folosind (2) și (5) :

$$t = \frac{4}{3} \frac{m}{\hbar b^2} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} \right), \quad \omega = \frac{1}{1/\omega_0 + \frac{3}{4} \hbar b^2 t / m}, \quad (8)$$

de unde

$$k = \frac{4}{3} \frac{m}{\hbar b^2 t} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} \right) \quad (9)$$

și punind aici condiția : $t = \tau$, $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$, găsim :

$$k = \frac{4m}{3\hbar b^2 \tau \omega_0} = \frac{2m}{3\pi \hbar b^2 \tau n_0} = 32 \text{ g/m}^3. \quad (10)$$

Putem obține (8) integrând definit (limitele de integrare se corespund)

$$\int_0^t dt = -\frac{I}{K} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{I}{K} \frac{1}{\omega} \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \frac{I}{K} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} \right).$$

c) Continuăm integrarea :

$$d\theta = \omega dt, \quad \int d\theta = \theta = \int \frac{1}{1/\omega_0 + Kt/I} dt = \frac{I}{K} [\ln (1/\omega_0 + Kt/I) + C'],$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială : la

$$t = 0 \text{ avem } \omega = \omega_0 \text{ și } \theta = 0 : 0 = \ln \frac{1}{\omega_0} + C', C' = -\ln \frac{1}{\omega_0} = \ln \omega_0;$$

$$\theta = 2\pi N = \frac{I}{K} \ln \frac{1/\omega_0 + Kt/I}{1/\omega_0} = \frac{I}{K} \ln(1/\omega_0 + Kt/I). \quad (11)$$

Folosind (2), (5) și (10) avem

$$I/K = \omega_0 \tau, \quad (12)$$

$$\theta = 2\pi N = \omega_0 \tau \ln (1 + t/\tau), \quad N = n_0 \tau \ln (1 + t/\tau). \quad (13)$$

Punind $t = \tau$, găsim numărul de rotații cerut :

$$N = n_0 \tau \ln 2 = 6,9 \text{ rot.} \quad (14)$$

Putem obține rezultatul (14) și astfel : Înmulțim ecuația (6) cu $d\theta = \omega dt$:

$$-K\omega^2 d\theta = I \frac{d\omega}{dt} d\theta = I \omega d\omega, \quad (15)$$

separăm variabilele și integrăm :

$$d\theta = -\frac{I d\omega}{K \omega}, \quad \int d\theta = \theta = -\frac{I}{K} \int \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{I}{K} [\ln \omega + C''],$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $\omega = \omega_0$, $\theta = 0 : 0 = \ln \omega_0 + C''$, $C'' = -\ln \omega_0$;

$$\theta = \frac{I}{K} \ln \frac{\omega_0}{\omega} = \omega_0 \tau \ln \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (16)$$

care se poate obține și prin integrare definită (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^\theta d\theta = -\frac{I}{K} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega}, \quad \theta = -\frac{I}{K} \ln \frac{\omega}{\omega_0} = \omega_0 \tau \ln \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Punînd în (16) condiția $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$, regăsim (9).

**** 1.7.40.** a) Să considerăm un element de bară de lungime dx , masă dm , situat la distanța x de axa de rotație. La capetele sale acționează cele două tensiuni elastice : $-T(x)$, $T(x + dx)$ care dau rezultanta *centrifugă* : $T(x + dx) - T(x) = dT(x)$, atunci *lex secunda* pentru mișcarea circulară uniformă a elementului dm se scrie :

$$-dT = dm \omega^2 x = \frac{m}{l} dx \omega^2 x, \quad (1)$$

care prin integrare dă

$$dT = T = -\int \frac{m}{l} \omega^2 x dx = -\frac{m}{2l} \omega^2 [x^2 + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine* : pentru $x = l$ avem $T(l) = 0 : 0 = l^2 + C$, $C = -l^2$;

$$T(x) = \frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - x^2). \quad (2)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dT = T = -\int_l^x \frac{m}{l} \omega^2 x dx = -\frac{m}{2l} \omega^2 x^2 \Big|_l^x = -\frac{m}{2l} \omega^2 (x^2 - l^2).$$

Reacțiunea lagărului asupra barei este egală în modul și de semn opus cu tensiunea elastică de la capătul $x = 0$:

$$R = -T(0) = -\frac{1}{2} m \omega^2 l \quad (3)$$

(acționează spre lagăr).

b) Fie $u(x)$ deplasarea centrifugă a secțiunii din x , atunci *delasarea* secțiunii infinit vecine din $x + dx$ va fi evident $u(x + dx)$, iar elementul de bară dx va deveni

$$dx + u(x + dx) - u(x) = dx + du.$$

Alungirea sa relativă va fi (amintim $\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$) :

$$\epsilon(x) = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}. \quad (4)$$

Conform legii lui Hooke :

$$\sigma(x) = \frac{T(x)}{S} = E \epsilon(x) = E \frac{du}{dx}, \quad (5)$$

separăm variabilele și integrăm :

$$du = \frac{1}{ES} T(x) dx = \frac{1}{ES} \frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - x^2) dx,$$

$$\int du = u = \frac{1}{ES} \frac{m}{2l} \omega^2 \int (l^2 - x^2) dx = \frac{1}{ES} \frac{m}{2l} \omega^2 \left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine : pentru $x = 0$, avem $u(0) = 0$, rezultă $C = 0$,

$$u(x) = \frac{m\omega^2 x}{2ESl} \left(l^2 - \frac{x^2}{3} \right). \quad (6)$$

Alungirea totală a barei se obține imediat :

$$\Delta l = u(l) = m\omega^2 l^2 / (3ES), \quad (7)$$

ea reprezintă 2/3 din alungirea statică pe care ar produce-o forța de reacțiune R :

$$\Delta l = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} m\omega^2 l \right] : (ES).$$



Fig. 1.7.40R

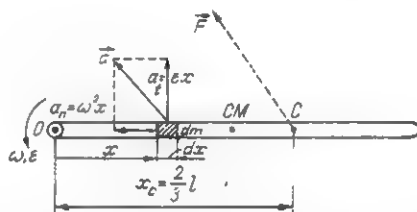


Fig. 1.7.41R

**** 1.7.41.** Știm că rezultanta forțelor aplicate unui corp este egală cu masa corpului înmulțită cu accelerația centrului de masă CM (ca și cum masa corpului ar fi concentrată în CM). Centrul de masă are o mișcare circulară neuniformă, de aceea accelerația sa tangențială și cea normală sînt :

$$a_t = \epsilon x_{cm} = \epsilon \frac{l}{2}, \quad a_n = \omega^2 x_{cm} = \omega^2 \frac{l}{2}. \quad (1)$$

Prin urmare, rezultanta forțelor aplicate are o componentă perpendiculară pe tijă și o componentă de-a lungul tijei centripet :

$$\vec{F}(F_t, F_n), \quad F_t = \frac{1}{2} m \epsilon l, \quad F_n = \frac{1}{2} m \omega^2 l, \quad (2)$$

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \frac{1}{2} ml \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}.$$

Deși valoarea (mărimea) forței rezultante este exact ca și cum toată masa corpului ar fi concentrată în CM, punctul de aplicație al acestei rezultante *nu este în CM!*

Descompunem corpul în puncte materiale (particule). Asupra unei par-

ticile oarecare m_k acționează forțe externe \vec{F}_k și forțe interne $\vec{\mathcal{F}}_k$ din partea celorlalte particule din sistem. *Lex secunda* se scrie :

$$\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k = m_k \vec{a}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

dacă sumăm membru cu membru toate ecuațiile (3) găsim

$$\sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_k m_k \vec{a}_k, \quad (4)$$

dar *rezultanta forțelor interne, ca și momentul resultant al forțelor interne față de orice pol, sînt nule* :

$$\sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = 0, \quad \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = 0. \quad (5)$$

Pe de altă parte, vectorul de poziție al centrului de masă

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{r}_k \quad (6)$$

derivat fiind de două ori dă :

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{v}_k, \quad (7)$$

$$\dot{\vec{v}}_{cm} = \vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{v}}_k = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{a}_k,$$

astfel încît ecuația (4) devine :

$$\sum \vec{F}_k = \vec{F} = \sum m_k \vec{a}_k = m \vec{a}_{cm}, \quad (8)$$

adică am găsit rezultatul binecunoscut.

Să construim acum momentul forțelor înmulțind ecuația (3) *vectorial în stînga* cu vectorul de poziție \vec{r}_k :

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k,$$

sumăm aceste ecuații membru cu membru, ținînd seama de (5) :

$$\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k. \quad (9)$$

În cazul distribuției *continue* a masei în locul particulei m_k va sta elementul de masă dm cu vectorul său de poziție \vec{r} și în locul sumei vom avea o integrală :

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} \, dm. \quad (10)$$

Să aplicăm ultima ecuație în cazul nostru. Luăm un element de masă $dm = \frac{m}{l} dx$ la distanța x de axă, el are o mișcare circulară neuniformă cu accelerația tangențială și cea normală :

$$a_t = \epsilon x, \quad a_n = \omega^2 x. \quad (11)$$

Vom lua momentele față de articulația O . Forțele normale (centripete) $dm \omega^2 x$ nu dau moment față de O (braț nul), iar cele tangențiale dau un moment vertical, perpendicular pe planul orizontal al mișcării. Toate aceste momente elementare se însumează deci *algebric* pentru a da momentul resultant al forțelor aplicate :

$$M = \int x \, dm \, a_t = \int_0^l \frac{m}{l} \epsilon x^2 dx = \frac{1}{3} m \epsilon l^2. \quad (12)$$

Pe de altă parte, notînd cu x_c coordonata punctului de aplicație al rezultantei forțelor aplicate, trebuie ca momentul acestei rezultante să fie identic cu (12):

$$F_1 \cdot x_c = M, \quad \frac{1}{2} m \epsilon l \cdot x_c = \frac{1}{3} m \epsilon l^2, \quad x_c = \frac{2}{3} l. \quad (13)$$

Acest punct de aplicație a rezultantei forțelor aplicate se cheamă *centrul de oscilație* (are proprietăți interesante).

**** 1.7.42.** Descompunem corpul într-un sistem de puncte materiale (particule) de mase m_k , $k = 1, 2, 3, \dots$. Asupra fiecărei particule m_k acționează în general forțe externe \vec{F}_k și forțe interne $\vec{\mathcal{F}}_k$ din partea celorlalte particule din sistem. Forțele interne de interacție între particulele sistemului sînt totdeauna perechi: acțiunea și reacțiunea (lex tertia), deaceia rezultanta lor și momentul resultant față de orice pol, sînt nule:

$$\sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = 0, \quad \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = 0. \quad (1)$$

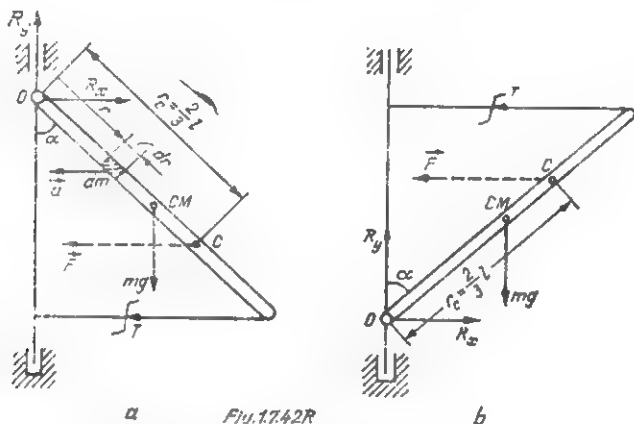


Fig. 1.7.42R

Scriem lex secunda pentru fiecare particulă:

$$\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k = m_k \vec{a}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Sumăm membru cu membru aceste ecuații:

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{\mathcal{F}}_k = \sum m_k \vec{a}_k \text{ sau } \sum \vec{F}_k = \vec{F} = m \vec{a}_{cm}, \quad (3)$$

fiindcă

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{r}_k, \quad \dot{\vec{r}}_{cm} = \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{v}_k, \quad (4)$$

$$\dot{\vec{v}}_{cm} = \vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{v}}_k = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{a}_k.$$

Am găsit rezultatul cunoscut (3).

Să considerăm acum momentul forțelor față de un pol arbitrar. Pentru aceasta înmulțim *vectorial la stînga* fiecare ecuație (2) cu \vec{r}_k și sumăm ecuațiile obținute membru cu membru:

$$\begin{aligned} \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k &= \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k \text{ sau } \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \\ &= \vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

În cazul distribuției continue a masei punctul material (particula) m , devine elementul de masă dm cu accelerația sa \vec{a} și vectorul său de poziție \vec{r} (fără indici), iar suma discretă trece în suma continuă, adică în integrală :

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm. \quad (6)$$

Vom aplica relațiile (3) și (6) în cazul problemei noastre.

a) Luăm un element de masă $dm = \frac{m}{l} dr$ la distanța r de articulație;

acesta are o mișcare circulară uniformă cu accelerația centripetă $a = \omega^2 r \sin \alpha$. Vom aplica relația (6) față de articulație (amintim că articulația ideală nu dă moment). Momentele elementare $\vec{r} \times \vec{a} dm$ sînt toate perpendiculare pe desen (spre desen), deaceia se însumează algebric :

$$dM = r a dm \cos \alpha = r \omega^2 r \sin \alpha \cos \alpha \frac{m}{l} dr,$$

$$M = \int dM = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (7)$$

Relația (3) dă :

$$F_x = m a_{cmx} = - m \omega^2 \frac{1}{2} l \sin \alpha, \quad F_y = - m a_{cmy} = 0. \quad (8)$$

Punctul de aplicație al rezultantei (8) se poate obține din condiția ca momentul ei față de orice pol să fie egal cu (6). Notînd cu r_c distanța acestui punct pînă la articulație și alegînd polul în articulație, momentul rezultantei (8) trebuie să fie egal cu momentul (7) :

$$F_x \cdot r_c \cos \alpha = M, \quad \frac{1}{2} m \omega^2 l \sin \alpha \cdot r_c \cos \alpha = \frac{1}{3} m \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (9)$$

$$r_c = \frac{2}{3} l.$$

Prin urmare, deși rezultanta forțelor externe aplicate este $\vec{F} = m \vec{a}_{cm}$, ea și cum masa corpului ar fi concentrată în CM, totuși punctul de aplicație al rezultantei este în *centrul de oscilație* (9) (rezultat cunoscut).

Pe de altă parte, asupra tijei acționează 3 forțe externe : \vec{R} , $m \vec{g}$ și \vec{T} . Rezultanta acestor forțe și momentul resultant al acestor forțe față de articulație sînt :

$$F_x = R_x - T, \quad F_y = R_y - mg, \quad (10)$$

$$M = mg \frac{l}{2} \sin \alpha + T l \cos \alpha. \quad (11)$$

Egalînd aceste expresii cu (8), (7), avem :

$$M = mg \frac{l}{2} \sin \alpha + T l \cos \alpha = \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

de unde rezultă

$$T = mg \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha - \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Deoarece $T > 0$ (tensiunea într-un fir nu poate fi negativă), tija va sta depărtată de axa verticală numai dacă

$$\omega^2 > \frac{3}{2} \frac{g}{l \cos \alpha} = \omega_m^2, \quad (13)$$

deci va începe să se depărteze de axa verticală numai dacă

$$\omega > \sqrt{\frac{3g}{2l}} = \omega_c. \quad (14)$$

Mai departe, dacă $\omega \geq \omega_m$:

$$R_x = T - \frac{1}{2} m \omega^2 l \sin \alpha = -\frac{1}{2} m g \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha + 1 \right), \quad (15)$$

$$R_y = m g.$$

În cazul limită $\omega = \omega_m$:

$$T = 0, \quad R_x = -\frac{3}{4} m g \operatorname{tg} \alpha, \quad (\omega = \omega_m). \quad (16)$$

Dacă $\omega \leq \omega_c = \sqrt{3g/(2l)}$, bara nu deviază:

$$T = 0, \quad R_x = 0, \quad R_y = m g, \quad (\omega \leq \omega_c). \quad (17)$$

Pentru $\omega_c < \omega < \omega_m$ bara va devia cu un unghi $\theta < \alpha$ dat de $T = 0$:

$$\cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l}, \quad T = 0, \quad R_x = -\frac{1}{2} m \omega^2 l \sin \theta, \quad R_y = m g. \quad (18)$$

b) În baza rezultatelor precedente, rezultanta forțelor externe aplicate este $\vec{F} = m \vec{a}_{\text{cm}}$ (8):

$$F_x = -\frac{1}{2} m \omega^2 l \sin \alpha, \quad F_y = 0 \quad (9)$$

cu punctul de aplicație în centrul de oscilație $r_c = \frac{2}{3} l$.

Momentul forțelor externe față de articulație trebuie să fie (7):

$$M = \frac{1}{3} m \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (10)$$

Pe de altă parte, asupra tijei acționează 3 forțe: $m\vec{g}$, \vec{R} și \vec{T} , rezultanta lor și momentul lor trebuie să fie egale cu (8), (7) de mai sus:

$$R_x - T = F_x = -\frac{1}{2} m \omega^2 l \sin \alpha, \quad R_y - m g = F_y = 0; \quad (11)$$

$$T l \cos \alpha - m g \frac{1}{2} l \sin \alpha = M = \frac{1}{3} m \omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (12)$$

De aici rezultă:

$$T = m g \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha \right), \quad (13)$$

$$R_x = \frac{1}{2} m g \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha \right), \quad R_y = m g. \quad (14)$$

La turații mici avem $R_x > 0$, bara împinge asupra articulației, dar la turații $\omega > \sqrt{3g/(l \cos \alpha)}$, avem $R_x < 0$ și bara trage de articulație.

**** 1.7.43.** Întrucît rezultanta forțelor *interne* și momentul rezultat al forțelor *interne* față de orice pol sînt nule, rezultă în virtutea principiului II că rezultanta \vec{F} și momentul rezultat \vec{M} al forțelor *externe* aplicate sînt :

$$\vec{F} = \int \vec{a} dm = m \vec{a}_{cm}, \quad (1)$$

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm. \quad (2)$$

În cazul problemei noastre rezultanta forțelor externe aplicate :

$$F_r = -m\omega^2 R_0, F_\theta = m\varepsilon R_0, F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} = mR_0 \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (3)$$

încălinată cu unghiul α față de raza vectorie :

$$|\operatorname{tg} \alpha = F_\theta / F_r = -\frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4)$$

Deși mărimea forței rezultante este exact ca și cum masa plăcii ar fi concentrată în CM, totuși *punctul de aplicație* al acestei rezultante nu este în CM (ci în centrul de oscilație). Fie R_c distanța de la axa de rotație pînă la punctul de aplicație al rezultantei. Pentru a afla momentul rezultat al forțelor externe aplicate, vom folosi ecuația (2). Alegem polul în punctul O al axei de rotație. Atunci toate momentele elementare $d\vec{M} = \vec{r} \times \vec{a} dm$ sînt perpendiculare pe placă și se însumează algebric :

$$M = \int r \cdot a_t dm = \int r \varepsilon r dm = \varepsilon \int r^2 dm = I \varepsilon, \quad (5)$$

unde I este momentul de inerție al plăcii față de axa de rotație. Am regăsit ecuația cunoscută pentru mișcarea de rotație în jurul axei fixe. Egalăm momentul rezultat (3) cu (5) :

$$M = F_\theta \cdot R_c = I \varepsilon, R_c = \frac{I \varepsilon}{F_\theta} = \frac{I}{mR_0}. \quad (6)$$

Cine cunoaște teoria pendulului fizic, recunoaște în (6) lungimea redusă a pendulului fizic față de axa de rotație, iar C este centrul de oscilație. Aplicînd teorema lui Steiner :

$$I = I_0 + mR_0^2, \quad (7)$$

$$\text{putem scrie :} \quad R_c = \frac{I_0}{mR_0} + R_0, \quad (8)$$

deci centrul de oscilație C se află mai departe de axa de oscilație O decît CM.

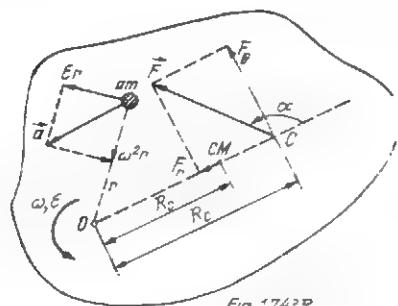


Fig. 1.743.R

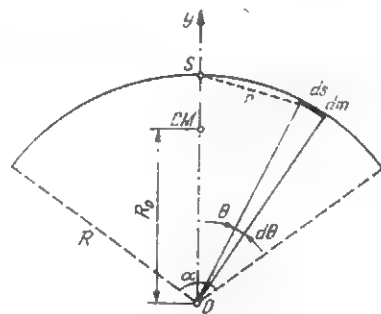


Fig. 1.744.R

**** 1.7.44.** Să găsim poziția centrului de masă CM,

$$R_0 = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R \cos \theta \frac{m}{\alpha} d\theta = \frac{R}{\alpha} \sin \theta \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{2R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Calculăm momentul de inerție față de axa de suspensie din S :

$$I = \int r^2 dm = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(2R \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \frac{m}{\alpha} d\theta = \frac{4m}{\alpha} R^2 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{2m}{\alpha} R^2 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (1 - \cos \theta) d\theta = 2mR^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (2)$$

Dealtfel, în cazul nostru putem afla I (2) cunoscând (1) și aplicând de două ori teorema lui Steiner:

$$\text{față de } S: I = I_0 + m(R - R_0)^2,$$

$$\text{față de } O: mR^2 = I_0 + mR_0^2,$$

de unde

$$I = m(R^2 - R_0^2) + m(R - R_0)^2 = 2mR(R - R_0) =$$

$$= 2mR^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Perioada micilor oscilații ale unui pendul fizic este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR_{cm}}}, \quad (3)$$

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de oscilație și R_{cm} — distanța CM până la axa de oscilație. În cazul nostru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg(R - R_0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}, \quad (4)$$

deci independentă de lungimea arcului de cerc, lungimea redusă a acestui pendul fizic fiind $l_r = 2R$ și centrul de oscilație fiind deci în punctul diametral opus lui S .

(*) 1.7.45.

$$T = 2\pi \sqrt{I/(mgx)}, \quad (1)$$

dar conform teoremei lui Steiner:

$$I = I_0 + mx^2, \quad (2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgx} \oplus \frac{x}{g}}. \quad (3)$$

Condiția de extremum pentru T este anularea derivatei $\frac{dT}{dx}$.

Putem anula derivata expresiei de sub radical:

$$-\frac{I_0}{mgx^2} + \frac{1}{g} = 0, \text{ de unde } x_m = \sqrt{I_0/m}, \quad (4)$$

$$T_m = \pi \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{I_0}{m}}. \quad (5)$$

Dealtfel sub radical avem suma a doi termeni al căror produs este constant, atunci suma este minimă cind termenii sint egali :

$$I_0/(mgx) = x/g, \quad x_m = \sqrt{I_0/m}.$$

Rezultatul este valabil pentru orice pendul fizic : există o distanță x_m (4) pînă la CM, pentru care perioada este minimă (5).

În cazul barei :

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 \quad (6)$$

și atunci

$$x_m = \frac{\sqrt{3}}{6} l, \quad T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3g} l}. \quad (7)$$

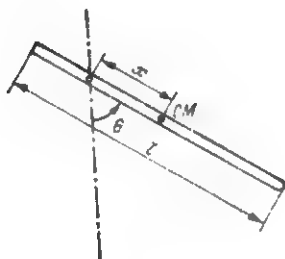


Fig. 1.7.45R

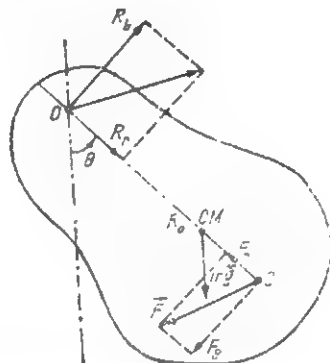


Fig. 1.7.46R

* 1.7.46. a) Conservarea energiei cinetice și potențiale dă :

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad h = R_0 (\cos \theta - \cos \alpha),$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{2}{I} mgR_0 (\cos \theta - \cos \alpha). \quad (1)$$

Prin derivare în raport cu timpul :

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{2}{I} mgR_0 (-\sin \theta \cdot \dot{\theta}), \quad \text{dar} \quad \dot{\omega} = \epsilon, \quad \dot{\theta} = \omega,$$

$$\epsilon = -\frac{1}{I} mgR_0 \sin \theta. \quad (2)$$

b) Rezultanta forțelor externe aplicate pendulului :

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm}, \quad F_r = ma_n = -m\omega^2 R_0 = -\frac{2}{I} gm^2 R_0^2 (\cos \theta - \cos \alpha), \quad (3)$$

$$F_t = ma_t = m\epsilon R_0 = -\frac{1}{I} gm^2 R_0^2 \sin \theta.$$

Această forță rezultantă nu are punctul de aplicație în CM! deși valoarea ei este aceeași ca și cum masa corpului ar fi concentrată în CM. Pe de altă parte pendulul este supus la două forțe externe : greutatea $m\vec{g}$ și

forța de reacțiune a axei $\vec{R}(R_r, R_\theta)$. Identificînd rezultanta acestora cu (3) găsim

$$mg \cos \theta + R_r = F_r = -\frac{2}{I} gm^2 R_0^2 (\cos \theta - \cos \alpha),$$

$$-mg \sin \theta + R_\theta = F_\theta = -\frac{1}{I} gm^2 R_0^2 \sin \theta,$$

de unde

$$R_r = -mg \cos \theta - \frac{2}{I} gm^2 R_0^2 (\cos \theta - \cos \alpha) < 0,$$

(4)

$$R_\theta = mg \sin \theta - \frac{1}{I} gm^2 R_0^2 \sin \theta = mg \sin \theta (1 - mR_0^2/I) \geq 0,$$

deoarece conform teoremei lui Steiner $I = I_0 + mR_0^2$ și deci $I \geq mR_0^2$. Reciproc, asupra axului de suspensie pendulul va acționa cu forțele $-R_r$ și $-R_\theta$, deci trage radial de axă și apasă transversal pe axă. În general, axa de suspensie va reacționa și cu un cuplu (moment) asupra pendulului și reciproc pendulul va acționa asupra axei cu un cuplu de moment opus.

$$c) \quad I_0 = \frac{1}{12} ml^2, \quad I = \frac{1}{3} ml^2, \quad R_0 = \frac{1}{2} l, \quad (5)$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha), \quad \varepsilon = -\frac{3g}{2l} \sin \theta, \quad (6)$$

$$R_r = -\frac{1}{2} mg (5 \cos \theta - 3 \cos \alpha), \quad R_\theta = \frac{1}{4} mg \sin \theta. \quad (7)$$

**** 1.7.47.** Asupra barei acționează două forțe externe \vec{G} și \vec{N} a căror rezultantă :

$$\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}_{cm}, \quad -G + N = ma_{cm}. \quad (1)$$

Mișcarea de rotație în jurul CM :

$$M = N \frac{l}{2} \cos \theta = I\varepsilon = \frac{1}{12} ml^2 \varepsilon. \quad (2)$$

Nu avem forțe orizontale, CM va coborî pe verticală :

$$y_{cm} = \frac{l}{2} \sin \theta, \quad x_{cm} = \dot{y}_{cm} = \frac{l}{2} \cos \theta \cdot \dot{\theta} = -\frac{l}{2} \omega \cos \theta, \quad \dot{\theta} = -\omega, \quad (3)$$

$$a_{cm} = \dot{v}_{cm} = \ddot{y}_{cm} = -\frac{l}{2} (\dot{\omega} \cos \theta - \omega \sin \theta \cdot \dot{\theta}) = -\frac{l}{2} (\omega^2 \sin \theta + \varepsilon \cos \theta).$$

a) Pentru momentul *inițial* : $\omega = 0$ și ecuațiile (1), (2) dau

$$-G + N_0 = ma_{cm0} = -\frac{1}{2} ml \varepsilon_0 \cos \alpha,$$

$$N_0 \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{1}{12} ml^2 \varepsilon_0,$$

de unde

$$N_0 = \frac{G}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \quad \text{sau} \quad \vec{N}_0 = - \frac{\vec{G}}{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{6G \cos \alpha}{ml (1 + 3 \cos^2 \alpha)}.$$

Forța de apăsare asupra podelei va fi deci $G : (1 + 3 \cos \alpha)$.

$$b) \quad \vec{G} + \vec{N}_0 = m \vec{a}_{cm0}, \quad \vec{a}_{cm0} = \vec{g} : [1 + 1/(3 \cos^2 \alpha)]. \quad (5)$$

$$c) \quad \varepsilon_0 = \frac{6g \cos \alpha}{l(1 + 3 \cos^2 \alpha)}. \quad (6)$$

d) CM coboară pe verticală după axa Oy , atunci coordonatele capătului superior B sînt :

$$x = -\frac{l}{2} \cos \theta, \quad y = l \sin \theta, \quad \frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1, \quad (7)$$

elipsă cu semiaxele $l/2$ și l .

e) Din (1) și (3) avem

$$N = G + ma_{cm} = G - \frac{1}{2} ml(\omega^2 \sin \theta + \varepsilon \cos \theta),$$

iar din (2)

$$N = \frac{1}{6} \frac{ml \varepsilon}{\cos \theta},$$

astfel încît rezultă

$$\varepsilon \left(\frac{ml}{6 \cos \theta} + \frac{ml}{2} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} ml \sin \theta \omega^2 = G$$

$$\text{sau} \quad \omega \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{3} \right) + \omega^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\varepsilon G}{ml} \cos \theta. \quad (8)$$

Să transformăm această ecuație într-una mai simplă. Înmulțim peste tot cu $2\omega dt = -2d\theta$ și ținem seama că $\omega \cos \theta dt = -\cos \theta d\theta = -d \sin \theta$:

$$2\omega d\omega \left(\frac{4}{3} - \sin^2 \theta \right) - 2\omega^2 \sin \theta d \sin \theta = -\frac{4G}{ml} d \sin \theta$$

sau

$$d \left(\omega^2 \left(\frac{4}{3} - \sin^2 \theta \right) \right) = -\frac{4G}{ml} d \sin \theta.$$

Variabilele s-au separat. Integrăm :

$$\int d \left[\omega^2 \left(\frac{4}{3} - \sin^2 \theta \right) \right] = \frac{4G}{ml} \int d \sin \theta,$$

$$\omega^2 \left(\frac{4}{3} - \sin^2 \theta \right) = -\frac{4G}{ml} \sin \theta + C, \quad (9)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0, \theta = \alpha, \omega = 0 : 0 = -\frac{4G}{ml} \sin \alpha + C, \quad C = \frac{4G}{ml} \sin \alpha,$$

(10)

$$\omega^2 = \frac{12G(\sin \alpha - \sin \theta)}{ml(4 - 3 \sin^2 \theta)}.$$

**** 1.7.48.** Centrul de masă descrie un arc de cerc de rază $l/2$.
 Rezultanta forțelor externe $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ dă pe direcția centripetă și tangențială :

$$(mg - N_1) \sin \theta - N_2 \cos \theta = m\omega^2 \frac{l}{2}, \quad (1)$$

$$(mg - N_1) \cos \theta + N_2 \sin \theta = m\varepsilon \frac{l}{2}. \quad (2)$$

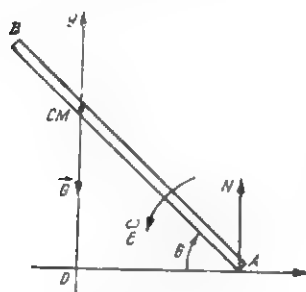


Fig. 1747P

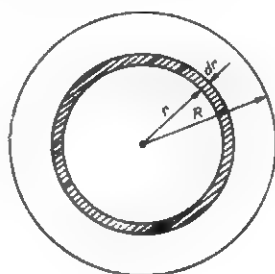


Fig. 1749R

Ecuatia mișcării de rotație în jurul CM :

$$N_1 \frac{l}{2} \cos \theta - N_2 \frac{l}{2} \sin \theta = I\varepsilon = \frac{1}{12} ml^2 \varepsilon. \quad (3)$$

Din ecuațiile (2) și (3) rezultă imediat accelerația unghiulară :

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \theta = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (4)$$

Pentru a afla viteza unghiulară ω vom integra ecuația (4), dar în prealabil o înmulțim cu 2ω pentru a putea separa variabilele ($\omega = -\dot{\theta}$):

$$2\omega d\omega = d(\omega^2) = 3 \frac{g}{l} \cos \theta \omega dt = \frac{3g}{l} \cos \theta (-d\theta) = -\frac{3g}{l} d \sin \theta.$$

Prin integrare :

$$\int d(\omega^2) = \omega^2 = -\frac{3g}{l} \int d \sin \theta = -\frac{3g}{l} \sin \theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

la $t = 0$ avem $\theta = \alpha$ și $\omega = 0$: $0 = -\frac{3g}{l} \sin \alpha + C$, $C = \frac{3g}{l} \sin \alpha$, (5)

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} (\sin \alpha - \sin \theta).$$

b) Din ecuațiile (1) și (2), ținând seama de ε (4) și ω^2 (5), rezultă :

$$N_1 = \frac{1}{4} mg(1 + 9 \sin^2 \theta - 6 \sin \alpha \sin \theta), \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{3}{4} mg(3 \sin \theta - 2 \sin \alpha) \cos \theta. \quad (7)$$

c) Condiția de desprindere de perete :

$$N_2 = 0 \rightarrow \sin \theta_0 = \frac{2}{3} \sin \alpha. \quad (8)$$

d) În momentul desprinderii (8):

$$N_{20} = 0, N_{10} = \frac{1}{4} mg, \quad \vec{N}_{10} = -\frac{1}{4} m\vec{g}, \quad (9)$$

$$m\vec{g} + \vec{N}_{10} = m\vec{a}_{cm0}, \quad \vec{a}_{cm0} = \frac{3}{4} \vec{g}. \quad (10)$$

e) În momentul desprinderii (5) devine:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \sin \alpha. \quad (11)$$

Folosind rezultatul (9) al problemei precedente, anume

$$\omega^2 \left(\frac{4}{3} - \sin^2 \theta \right) = -\frac{4g}{l} \sin \theta + C, \quad (12)$$

determinăm constanta de integrare din condiția inițială: pentru $\theta = \theta_0$ (8) avem $\omega = \omega_0$ (11):

$$\frac{g}{l} \sin \alpha \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha \right) = -\frac{4g}{l} \frac{2}{3} \sin \alpha + C,$$

$$C = \frac{4g}{l} \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{9} \sin^2 \alpha \right),$$

$$\text{astfel încît:} \quad \omega^2 = \frac{4g}{3l} \frac{9(\sin \alpha - \sin \theta) - \sin^3 \alpha}{4 - 3 \sin^2 \theta}. \quad (13)$$

**** 1.7.49.** Profităm de simetria circulară a discului și alegem un element de arie dS sub forma unui inel infinit de subțire, de rază r și grosime dr , ca în figură. Aria acestui element se poate calcula în trei moduri: dS este aria unei fișii de lungime $2\pi r$ și lățime dr : $dS = 2\pi r dr$. Altfel, dS este creșterea infimezimală a ariei cercului $S = \pi r^2$, datorită creșterii infimezimale cu dr a razei sale, deci $dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$. În sfârșit, dS este diferența ariilor cercurilor de rază $r + dr$ și r : $dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \rightarrow 2\pi r dr$, (termenul pătratic în dr se anulează față de termenul liniar dr). Forța de greutate fiind repartizată uniform, apăsarea pe aria

dS va fi evident $dN = \frac{mg}{\pi R^2} dS$. Forțele de frecare din cuprinsul inelului dS au brațul r și dau momentul resultant față de centrul discului:

$$dM = \mu dN \cdot r = \mu \frac{mgr}{\pi R^2} dS = \mu \frac{mg}{R^2} 2r^2 dr,$$

integrăm pe tot discul:

$$M = \int dM = \int_0^R 2\mu \frac{mg}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mgR. \quad (1)$$

Acesta este momentul forțelor de frecare, atunci ecuația mișcării de rotație (uniform încetinită):

$$-M = I\varepsilon \quad \text{sau} \quad -\frac{2}{3} \mu mgR = \frac{1}{2} mR^2 \varepsilon, \quad \varepsilon = -\frac{4}{3} \mu g \frac{1}{R}. \quad (2)$$

Țimpul pînă la oprire și unghiul pînă la oprire:

$$t_m = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = -\frac{3}{4} \omega_0 R \frac{1}{\mu g}, \quad (3)$$

$$\theta_m = 2\pi N_m = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{3}{8} \omega_0^2 \frac{R}{\mu g}, \quad (4)$$

numărul de rotații pînă la oprire :

$$N_m = \frac{1}{2\pi} \theta_m = \frac{3}{16\pi} \omega_0^2 \frac{R}{\mu g}. \quad (5)$$

**** 1.7.50.** Fie un sistem oarecare. Luăm un element de masă dm care are accelerația \vec{a} și vectorul de poziție \vec{r} față de un pol oarecare. Asupra acestui element acționează forțe externe $d\vec{F}$ din partea corpurilor care *nu* fac parte din sistem și forțe interne $d\vec{\mathcal{F}}$ din partea celorlalte particule *din* sistem. Lex secunda pentru acest element se scrie :

$$d\vec{F} + d\vec{\mathcal{F}} = dm \cdot \vec{a}. \quad (1)$$

Luînd momentele forțelor față de polul ales avem de asemenea :

$$\vec{r} \times d\vec{F} + \vec{r} \times d\vec{\mathcal{F}} = \vec{r} \times \vec{a} \cdot dm. \quad (2)$$

Acum să ne amintim de teorema : rezultanta forțelor *interne* ale unui sistem și momentul resultant al forțelor *interne* față de orice pol, sînt nule :

$$\int d\vec{\mathcal{F}} = 0, \quad \int \vec{r} \times d\vec{\mathcal{F}} = 0. \quad (3)$$

Integrăm ecuațiile (1) și (2) ținînd seama de (3) :

$$\int d\vec{F} + \int d\vec{\mathcal{F}} = \int \vec{a} dm \quad \text{sau} \quad \vec{F} = \int \vec{a} dm, \quad (4)$$

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} + \int \vec{r} \times d\vec{\mathcal{F}} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm \quad \text{sau} \quad \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm,$$

unde \vec{F} și \vec{M} sînt rezultanta și momentul resultant al forțelor *externe* aplicate sistemului.

Vectorul de poziție al centrului de masă CM este

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm. \quad (5)$$

Prin derivare de două ori, găsim :

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \int \dot{\vec{r}} dm = \frac{1}{m} \int \vec{v} dm = \frac{\vec{P}}{m},$$

unde \vec{P} este impulsul total al sistemului,

$$\vec{P} = m\vec{v}_{cm}; \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{cm} = \ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \int \ddot{\vec{r}} dm = \frac{1}{m} \int \ddot{\vec{r}} dm = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{1}{m} \int \vec{a} dm = \frac{\vec{F}}{m},$$

sau

$$\vec{F} = \vec{P} = \int \vec{a} dm = m\vec{a}_{cm}, \quad (7)$$

am regăsit rezultate binecunoscute.

În cazul problemei noastre, asupra tijei acționează două forțe externe : greutatea $m\vec{g}$ în CM și reacțiunea articulației R în articulație. CM are o mișcare circulară uniformă, deci are accelerația centripetă :

$$a_{cm} = \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha. \quad (8)$$

Ecuția (7) dă

$$R_x = -m a_{cm} = -m \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad (9)$$

$$R_y - mg = 0, \quad R_y = mg.$$

Să apicăm acum ecuația (4). Luăm un element de masă dm , de grosime dr , situat la distanța r de articulație. Acest element are o mișcare circulară uniformă, deci are accelerația centripetă $a = \omega^2 r \sin \alpha$. Momentul $\vec{r} \times \vec{a} dm$ este perpendicular pe desen pentru toate elementele barei deci se însumează algebric:

$$M = \int -a dm r \cos \alpha, \quad dm = \frac{m}{l} dr,$$

(am ales sensul pozitiv pentru momente — sensul trigonometric).

$$\begin{aligned} M &= - \int_0^l \omega^2 r \sin \alpha \frac{m}{l} dr \cdot r \cos \alpha = - \frac{m}{l} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^l r^2 dr = \\ &= - \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Acest moment trebuie să fie egal cu momentul forțelor externe \vec{R} și $m\vec{g}$, dar \vec{R} nu dă moment față de articulație (are brațul zero), prin urmare:

$$M = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha = - \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (11)$$

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l \cos \alpha}.$$

Atunci (9) devine:

$$R_x = - \frac{3}{4} mg \operatorname{tg} \alpha, \quad R_y = mg. \quad (12)$$

Se poate observa că deși rezultanta forțelor externe este $m\vec{a}_{cm}$ ca și cum toată masa corpului ar fi concentrată în CM, *punctul de aplicație* al acestei rezultante *nu* este în CM, ci în *centrul de oscilație*, situat în cazul nostru la distanța $\frac{2}{3} l$ de articulație (rezultat pe care l-am mai întâlnit și la alte probleme). În adevăr, fie $C(r_c)$ punctul de aplicație al rezultantei. Atunci momentul ei trebuie să fie egal cu M (10):

$$-F \cdot r_c \cos \alpha = -m \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot r_c \cos \alpha = M = - \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (13)$$

$$r_c = \frac{2}{3} l.$$

Din relația (11) rezultă că tija va începe să devieze dacă

$$\omega > \sqrt{3g/(2l)}. \quad (14)$$

**** 1.7.51.** a) Curba este evident simetrică față de verticala care trece prin punctul de minim al curbei. Alegem axele ca în figură. Luăm un ele-

ment de lanț, de masă dm și lungime ds în punctul de coordonate (x, y) . Fie $\lambda = m/l$ densitatea liniară a lanțului. Avem

$$dm = \lambda ds, ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}. \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y', \quad \sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (2)$$

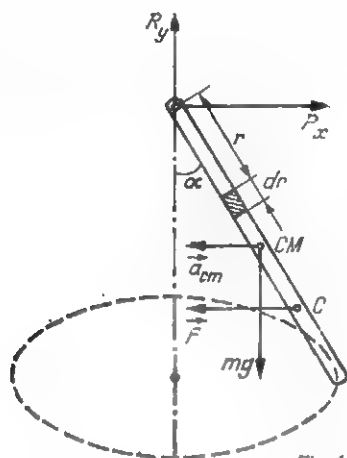


Fig. 1.7.50R

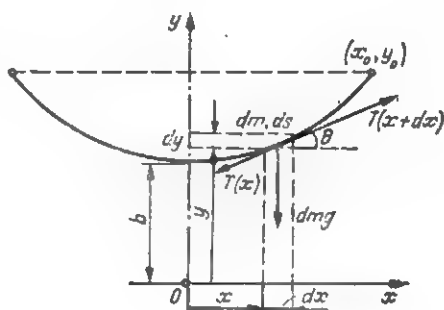


Fig. 1.7.51R

Asupra elementului dm acționează trei forțe: cele două tensiuni de la capetele sale și greutatea sa. Scriem condițiile de echilibru pe axe:

$$T(x + dx) \cos(\theta + d\theta) - T(x) \cos \theta = 0. \quad (3)$$

$$T(x + dx) \sin(\theta + d\theta) - T(x) \sin \theta - dm \cdot g = 0 \quad (4)$$

Prima ecuație reprezintă creșterea (diferențiala) funcției $T \cos \theta$ și ne spune că această funcție este constantă:

$$T \cos \theta = T \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C = T_0. \quad (5)$$

Proiecția tensiunii din lanț pe axa orizontală este constantă și egală cu tensiunea din punctul de minim.

A doua ecuație se retranscrie astfel:

$$d(T \sin \theta) = dm \cdot g \text{ sau } d\left(T \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \lambda g ds = \lambda g dx \sqrt{1 + y'^2}$$

și ținând seama de (5) se retranscrie astfel:

$$T_0 dy' = \lambda g dx \sqrt{1 + y'^2}. \quad (6)$$

Notînd $y' = p$, variabilele se separă și putem integra

$$T_0 \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda g dx, \quad T_0 \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda g \int dx, \quad (7)$$

$$T_0 \operatorname{arg sh} p = \lambda g x + C',$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția că în punctul de minim $x = 0$ avem $y' = p = 0$, deci $C = 0$, ($\operatorname{arg sh} 0 = 0$). Rezultă:

$$\operatorname{arg sh} p = \lambda g x / T_0, \quad p = y' = \operatorname{sh}(\lambda g x / T_0). \quad (8)$$

Integrăm mai departe:

$$\int dy = y = \int \operatorname{sh}(\lambda g x / T_0) dx = \frac{T_0}{\lambda g} \operatorname{ch}(\lambda g x / T_0) + C'.$$

Este comod să alegem constanta de integrare $C' = 0$ și să notăm

$$b = T_0/(\lambda g) = T_0 l/G, \quad (9)$$

atunci

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}), \quad (10)$$

această curbă se mai cheamă curba „lănțișor”, minimul ei $y_m = b$ (pentru $x = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$).

b) Tensiunea din lanț se găsește imediat din (5) și (8):

$$\begin{aligned} T &= T_0 \sqrt{1 + y'^2} = T_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{b}} = T_0 \operatorname{ch} \frac{x}{b} = \\ &= T_0 \frac{y}{b} = \lambda g y = \frac{G}{l} y. \end{aligned} \quad (11)$$

Să calculăm lungimea lanțului:

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2} = dx \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{b}, \quad \int ds = s = \int \operatorname{ch} \frac{x}{b} dx = b \operatorname{sh} \frac{x}{b} + C.$$

Dacă măsurăm lungimea arcului de lănțișor de la punctul de minim, atunci pentru $x = 0$ trebuie să avem $s = 0$, deci $C = 0$:

$$s = b \operatorname{sh} \frac{x}{b}. \quad (12)$$

Putem găsi o relație între coordonatele capetelor lanțului ($\pm x_0, y_0$) și lungimea lanțului l și săgeata f :

$$\frac{l}{2} = b \operatorname{sh} \frac{x_0}{b}, \quad f = y_0 - b = b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} - b. \quad (13)$$

Știind că

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (14)$$

găsim:

$$\begin{aligned} (f + b)^2 - l^2/4 &= b^2, \quad f^2 + 2fb - l^2/4 = 0, \\ b &= \frac{1}{2f} (l^2/4 - f^2) = T_0/(\lambda g). \end{aligned} \quad (15)$$

Pe de altă parte tensiunea la capete este:

$$T_c = T_0 \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} = T_0 \frac{y_0}{b} = \lambda g y_0 = \frac{m}{l} g y_0 = \frac{G}{l} y_0. \quad (16)$$

Putem exprima pe y_0 prin l și f :

$$y_0^2 = b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x_0}{b} = b^2 \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x_0}{b} \right) = b^2 \left(1 + \frac{l^2}{4b^2} \right) = b^2 + l^2/4,$$

înlocuind pe b din (15) rezultă

$$y_0 = \frac{1}{2f} (l^2/4 + f^2). \quad (17)$$

Atunci din (9) și (15) găsim

$$T_0 = \frac{bG}{l} = \frac{1}{2fl} (l^2/4 - f^2)G, \quad T_c = \frac{G}{l} y_0 = \frac{1}{2fl} (l^2/4 + f^2)G. \quad (18)$$

c) La limita lunecării verigilor de la capete, avem :

$$T_0 = T_{cx} = \mu T_{cy} = \frac{\mu G}{2}, \quad T_c = \sqrt{T_{cx}^2 + T_{cy}^2} = T_{cy} \sqrt{1 + \mu^2} =$$

$$= T_{cy} / \cos \varphi = G / (2 \cos \varphi),$$

$$b = \frac{T_0}{G} l = \frac{\mu l}{2}. \quad (20)$$

Pe de altă parte din (16) și (13) :

$$T_c = \frac{G}{l} y_0 = \frac{G}{l} b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} =$$

$$= \frac{G}{2b \operatorname{sh}(x_0/b)} b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} = \frac{G}{2 \operatorname{th}(x_0/b)} = \frac{G}{2 \cos \varphi},$$

de unde

$$\operatorname{th}(x_0/b) = \cos \varphi, \quad x_0/b = \arg \operatorname{th} \cos \varphi. \quad (21)$$

Dar să ne amintim că

$$\arg \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (22)$$

astfel încît, ținînd seama de (20) :

$$x_0 = b \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\mu l}{4} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu l}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

de unde rezultă distanța cerută dintre capete :

$$d = 2x_0 = l \operatorname{tg} \varphi \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

**** 1.7.52.** Vom neglija deformarea *transversală* a barei. Să considerăm în absența gravitației și a deformării un element de bară de lungime dx , masă $dm = \frac{m}{l} dx$ situat la distanța x de capătul superior. Datorită greutateii secțiunea din x se deplasează cu $u(x)$, iar secțiunea din $x + dx$ se deplasează cu $u(x + dx)$ și deci elementul dx va deveni :

$$dx + u(x + dx) - u(x) = dx + du,$$

alungirea sa este du și alungirea relativă :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}. \quad (1)$$

Dar conform legii lui Hooke

$$\sigma(x) = \frac{F}{S_0} = E \varepsilon(x), \quad (2)$$

unde $F = T(x)$ este tensiunea din bară în secțiunea x . Este evident că

$$T(x + dx) - T(x) = dT = - dm \cdot g = - \frac{m}{l} g dx,$$

de unde prin integrare

$$\int dT = T = - \frac{m}{l} g \int dx = - \frac{m}{l} gx + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine*:
 pentru $x = l$ avem $T(l) = 0$: $0 = -\frac{m}{l} gl + C$, $C = mg$,

$$T(x) = mg \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (3)$$

Legea lui Hooke (2) dă acum:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{ES_0} T(x) = \frac{1}{ES_0} mg \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad (4)$$

de unde
$$du(x) = \frac{1}{ES_0} mg \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx,$$

$$\int du = u = \frac{1}{ES_0} mg \int \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{ES_0} mg \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția *la margine*:
 pentru $x = 0$ avem $u(0) = 0$, deci $C' = 0$;

$$u(x) = \frac{mg}{ES_0} \left(x - \frac{x^2}{2l} \right). \quad (5)$$

Alungirea totală se obține de aici imediat punând $x = l$:

$$\Delta l = u(l) = \frac{mgl}{2ES_0}, \quad (6)$$

ca și cum forța de greutate mg ar acționa la mijlocul barei în CM și deci acționează numai asupra jumătății superioare $l/2$ a barei, cea inferioară ieșind din joc.

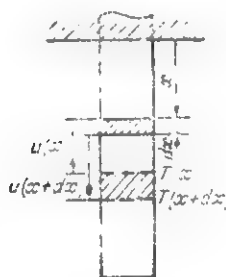


Fig. 1.752R

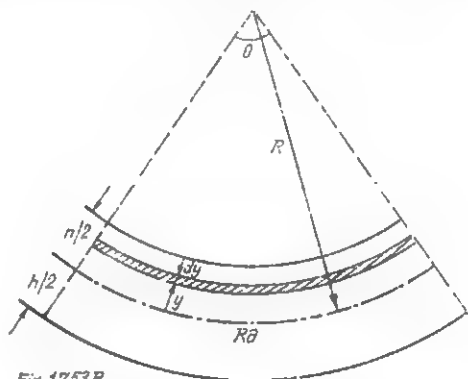


Fig. 1.753R

**** 1.753.** Să considerăm un strat infinit de subțire de grosime dy situat la distanța y de planul median de simetrie. Acest strat suferă alungirea relativă

$$\varepsilon(y) = \frac{(R-y)\theta - R\theta}{R\theta} = -\frac{y}{R}, \quad (1)$$

pentru $y > 0$ stratul este comprimat, iar pentru $y < 0$ este alungit. Știm că lucrul mecanic efectuat la tracțiunea barei raportat la unitatea de volum, egal cu densitatea de energie potențială de deformare elastică, este

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (2)$$

Prin urmare pentru stratul considerat

$$dW = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} E \frac{y^2}{R^2} l b dy.$$

Integrăm pe tot volumul benzii :

$$\int dW = W = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \frac{E}{R^2} l b y^2 dy = \frac{1}{24} \frac{E}{R^2} l b h^3. \quad (3)$$

În particular, dacă curbăm banda într-un cerc complet : $l = 2\pi R$:

$$W = \frac{1}{6} \pi^2 E \frac{1}{l} b h^3. \quad (4)$$

— 1.8. Mecanica fluidelor

Hidrostatica

1.8.1. La cel tronconic, deoarece prin răsturnare ρgh va crește.

1.8.2. a) Nivelul nu se schimbă, b) nivelul scade.

1.8.3. Se va ridica.

1.8.4. Nivelul apei crește, iar nivelul superior al uleiului scade.

1.8.5. $\Delta p \sim \frac{2}{3} \rho gh \sim 30 \text{ MPa} \approx 300 \text{ atm}$.

1.8.6. $M = \rho h \pi R^2 - m$.

1.8.7. $\Delta h = -F/(S \rho_a g) = -10 \text{ cm}$ (scade).

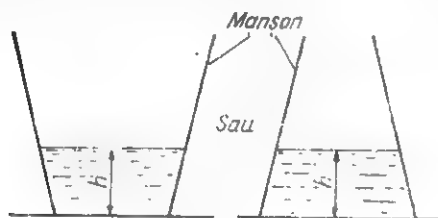


Fig. 1.8.14 R

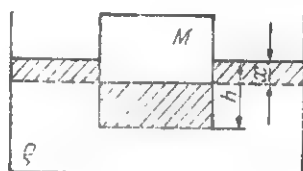


Fig. 1.8.15 R

1.8.8. $m = \rho_0 \rho_a S h : (\rho_0 - \rho_a) = 3,5 \text{ kg}$.

1.8.9. $m = (\rho_a - \rho_s) S h = 20 \text{ kg}$.

1.8.10. $\rho = \rho_0(h + d)/d = 1,6 \text{ g/cm}^3$.

1.8.11. $\rho_l = \rho_a(G - G_1) : (G - G_a) = 800 \text{ kg/m}^3$.

1.8.12. Nu se schimbă ; $F'/F = (g + a)/g$.

1.8.13. $m_b = \rho V a / (g + a) = 7,8 \text{ kg}$.

1.8.14. $F = F' : (1 - s/S)$.

1.8.15. $\alpha = m / (\rho \pi R^2)$.

1.8.16. $S = \Delta F / (\rho g \Delta h) = 6,25 \text{ cm}^2$.

1.8.17. $h = (m + m_1) / (2S \rho) = 10 \text{ cm}$.

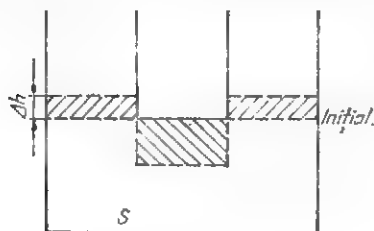


Fig. 1.8.16 R

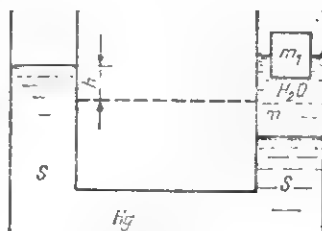


Fig. 1.8.17 R

1.8.18. $x = mS_2 : [\rho(S_1 + S_2)S_1] = 0,73 \text{ m.}$

1.8.19. $x = m(S - S_0)/(\rho SS_0).$

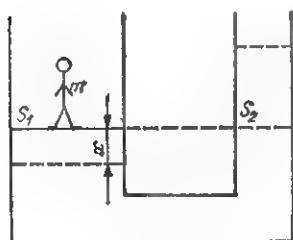


Fig. 1.8.18R

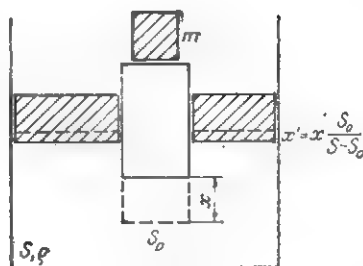


Fig. 1.8.19R

1.8.20. $\Delta h = h\rho s/(\rho_0 S)$, manșonul rămâne scufundat la fel în apă.

1.8.21. $H = h(D/d)^2(\rho/\rho_0 - 1) + h = 7,7 \text{ cm.}$

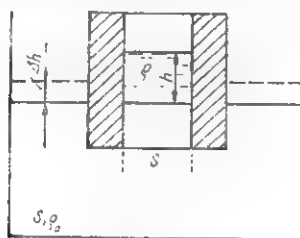


Fig. 1.8.20R

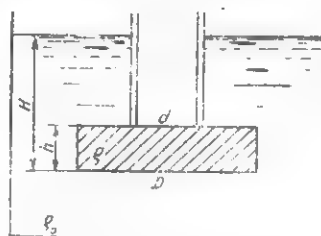


Fig. 1.8.21R

1.8.22. $\Delta h = m\Delta\rho : [\rho(\rho + \Delta\rho)S] \approx m\Delta\rho/(\rho^2 S) = 2,0 \text{ mm.}$

1.8.23. $\Delta h = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) : \rho_m = 5,1 \text{ mm.}$

1.8.24. $V_1/V = (\rho_2 - \rho) : (\rho_2 - \rho_1).$

1.8.25. $F = \rho ghS + mg - F_A.$

** 1.8.26. Fie $\rho = kx^2$. Să luăm un strat infinit de subțire la adâncimea x , de grosime dx , având deci masa

$$dm = \rho(x) dV = \rho(x) S dx = Skx^2 dx. \quad (1)$$

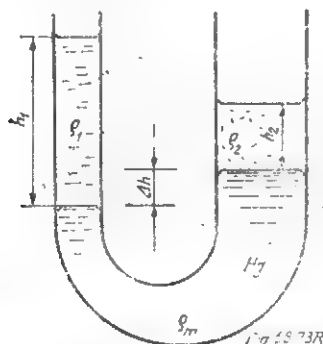


Fig. 1.8.26R

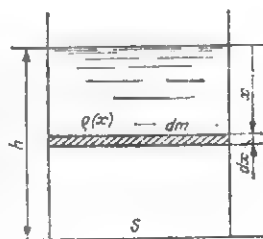


Fig. 1.8.26R

Prin integrare găsim masa lichidului până la adâncimea x :

$$m(x) = \int_0^x Skx^2 dx = Sk \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} Skx^3. \quad (2)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$m = \int dm = \int Skx^2 dx = \frac{1}{3} Skx^3 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția la margine : pentru $x = 0$ avem $m(0) = 0$, deci $C = 0$.

Masa totală va fi ($x = h$) :

$$M = \frac{1}{3} Skh^3. \tag{3}$$

Condiția cerută :

$$m(h') = \frac{1}{3} Skh'^3 = \frac{M}{2},$$

de unde

$$h' = h/\sqrt[3]{2} = 0,79 \, h. \tag{4}$$

1.8.27. a) $x = l \, (1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_0}) = 70 \, \text{cm}$, b) $\sin \alpha = h : [l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}] = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$, c) $\mu = \text{tg} \alpha = 1/\sqrt{3} = 0,58$.

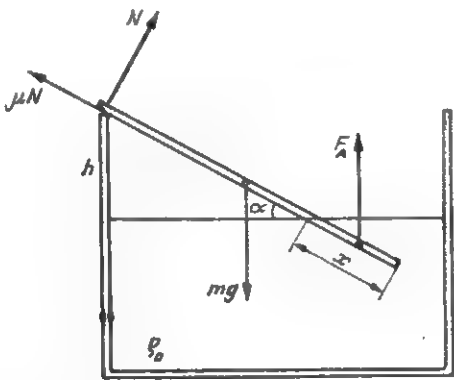


Fig.18 27R

1.8.28. $b_1/b_2 = 1 + (2\rho - \rho_0) V/m = 1,52$.

1.8.29. $l = [m_1 + m_2 - (V_1 + V_2)(\rho_0 + Ah_1)] : (AV_2) = 12,5 \, \text{cm}$.

(**) 1.8.30. a) În cazul cubului, considerăm un strat infinit de subțire, de grosime dv , aflat la adâncimea x și dezlocuind masa de fluid

$$dm = \rho(x)dV = (\rho_0 + kx) Sdx = (\rho_0 + kx) l^2dx. \tag{1}$$

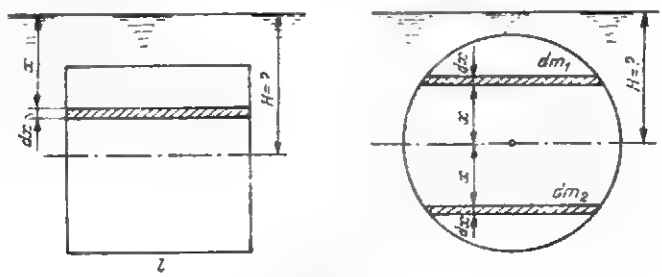


Fig 19 30R

Notăm cu H adâncimea la care se află centrul cubului. Integrăm :

$$m = \int dm = \int_{H-l/2}^{H+l/2} (\rho_0 + kx) l^2 dx = \rho_0 l^2 \cdot x \Big|_{H-l/2}^{H+l/2} + kl^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_{H-l/2}^{H+l/2} =$$

$$= \rho_0 l^2 \cdot l + kl^2 \frac{1}{2} 2Hl = (\rho_0 + kH)V.$$

Masa de fluid dezlocuită fiind egală cu masa cubului, rezultă

$$H = (m - \rho_0 V) : (kV). \quad (3)$$

b) În cazul sferei, vom folosi proprietatea de *simetrie* a sferei, raționamentul de mai jos fiind aplicabil și cubului. Considerăm două straturi înfinit de subțiri de grosime dx așezate *simetric* față de planul ecuatorial al sferei, ca în figură.

$$dm_1 = [\rho_0 + k(H - x)]dV, \quad dm_2 = [\rho_0 + k(H + x)]dV, \quad (4)$$

$$dm_1 + dm_2 = 2(\rho_0 + kH)dV,$$

deci suma celor două mase dezlocuite nu depinde de x și însumându-le găsim :

$$m = \int \frac{dm_1}{2} + \frac{dm_2}{2} = (\rho_0 + kH)V, \quad (5)$$

rezultat identic pentru cele două corpuri simetrice :

$$H = (m - \rho_0 V) : (kV). \quad (6)$$

Observăm că și în cazul cubului se poate face evident același raționament. De asemenea, putem lua elemente foarte mici $\Delta m, \Delta x$, etc, și raționamentul rămâne valabil, deci problema se poate rezolva și fără calculul diferențial și integral.

* **1.8.31.** Presiunea din dreptul dopului se poate considera ca fiind compusă din presiunea $p_0 = H + \rho gh$ de-a lungul axului cilindrului, plus presiunea inercială datorită rotației. Considerind un element dm

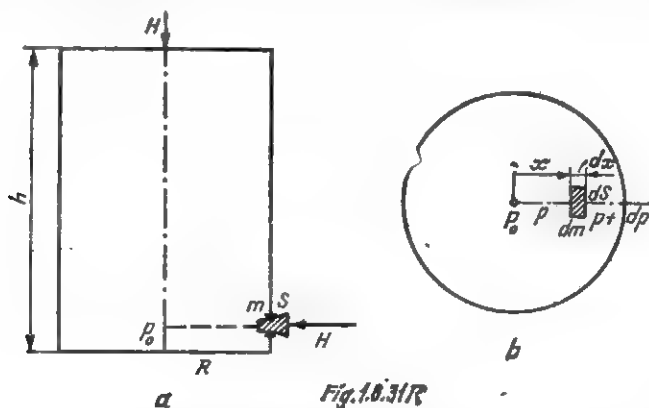


Fig. 1.8.31/R

ca în figură, avem ecuația principiului II al mecanicii pentru mișcarea circulară, pe direcția radială, centripet :

$$dF = [(p + dp) - p] dS = dm \cdot \omega^2 x = \rho dS dx \omega^2 x \text{ sau } dp = \rho \omega^2 x dx, \quad (1)$$

de unde prin integrare [limitele de integrare se corespund astfel : $(x = 0, p = p_0), (x, p)]:$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_0^x \rho \omega^2 x dx \text{ sau } p - p_0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2, \quad (2)$$

$$p(x) = H + \rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2, \quad p(R) = H + \rho gh + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2.$$

Se poate integra și nedefinit :

$$p = \int dp = \int \rho \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine : pentru $x = 0$ avem $p = p_0 = H + \rho gh$, deci $C = p_0$.

Cu cilindrul în repaus avem la limită condiția de echilibru pentru dop :

$$F + (H + \rho gh)S - HS - F_s = 0, \quad (3)$$

unde F_s este forța de frecare. În cazul rotației avem pentru dop :

$$HS + F_s - pS = m\omega^2 R.$$

Eliminând F_s și înlocuind p , rezultă :

$$n = \frac{1}{2\pi} [F : (mR + S\rho R^2/2)]^{1/2} = 16 \text{ rot/s.} \quad (5)$$

$$1.8.32. v'_0 = v_0 \rho_0 : (\rho - \rho_0) = 10,0 \text{ m/s.}$$

$$1.8.33. p = (p_0 + mg/S)(1 - \Delta h/h) = 90,0 \text{ kPa.}$$

Hidrodinamica

$$1.8.34. v = \sqrt[3]{2\eta P/(\rho S)} = 6,4 \text{ m/s.}$$

$$1.8.35. f = \rho Q \frac{Q}{S} = 5,0 \text{ N.}$$

$$1.8.36. P = 8Q^3 : (\pi^2 D^4 \rho^2) + Qgh = 1,0 \text{ W} + 49 \text{ W}, \quad P' = Qgh = 49 \text{ W} < P.$$

$$1.8.37. P'/P = \sqrt{1 - h/H}; \quad P''/P = 1 + h/H.$$

(*) 1.8.38. Fie debitul masic al apei

$$Q = \rho S v. \quad (1)$$

Pentru a calcula forța exercitată asupra paletelor vom calcula variația de impuls pe unitatea de timp : $F = \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|$. În timpul dt masa de apă

care ciocnește paleta este Qdt și variația sa de impuls va fi $Q dt(u - v)$, unde u este viteza liniară periferică a paletelor. Prin urmare forța :

$$F = Q(v - u) = Sv(v - u) \quad (2)$$

și puterea

$$P = F \cdot u = Sv(v - u)u. \quad (3)$$

În membrul drept avem produsul a două mărimi a căror sumă este constantă, atunci maximul produsului are loc când factorii sînt egali :

$$v - u = u, \quad u = v/2, \quad (4)$$

deci

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \rho S v^3 \text{ pentru turația } n = \frac{1}{2\pi} \frac{v}{2R} = 1,00 \text{ rot/s.} \quad (5)$$

Altfel, cu ajutorul derivatelor :

$$P = \text{const.} \quad (v - u)u = f(u).$$

condiția de extremum este anularea derivatei :

$$f'(u) = 0 = \text{const.} \quad (v - 2u), \text{ de unde } u = v/2. \quad (7)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua :

$$f''(u) = Sv(-2) < 0, \quad (8)$$

deci avem un *maxim*. Dealtfel, scriind puterea astfel :

$$P = -Svu^2 + Sv^2u = f(u), \quad (9)$$

se vede că puterea este o funcție pătratică al cărei grafic este o parabolă care are un maxim ($a = -Sv < 0$) pentru

$$u = \left[-\frac{b}{2a} \right] = -\frac{Sv^2}{2(-Sv)} = \frac{v}{2}. \quad (10)$$

$$1.8.39. \quad a = \rho Qv/m = 1,00 \text{ m/s}^2.$$

$$1.8.40. \quad \eta = 2 : (n + 1).$$

** 1.8.41. La adâncimea x presiunea hidrostatică a păturii de lichid este $p = \rho gx$ (presiunea atmosferică se compensează de o parte și de alta). Alegem o arie elementară dS sub forma unei fâșii orizontale de lățime infinitesimală dx , situată la adâncimea x . Pe această fișie dS presiunea este $p(x) = \rho gx$ și deci forța hidrostatică exercitată pe această arie :

$$dF = p(x) dS = \rho g x l dx. \quad (1)$$

Însumăm aceste forțe elementare, adică integrăm :

$$\int dF = F = \int_0^l \rho g l x dx = \rho g l \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} \rho V g = \frac{1}{2} m g = \frac{G}{2}. \quad (2)$$

Fie x_0 punctul de aplicație al acestei rezultante. Trebuie ca momentul rezultantei față de orice pol să fie egal cu momentul resultant al tuturor forțelor elementare de presiune față de același pol. Să luăm momentele față de punctul A , atunci momentul elementar dM al forței dF , adică contribuția fișiei dS , va fi :

$$dM = dF \cdot x = \rho g x l dx \cdot x = \rho g l x^2 dx. \quad (3)$$

Sumăm (integrăm) toate aceste momente :

$$M = \int dM = \int_0^l \rho g l x^2 dx = \rho g l \cdot \frac{l^3}{3} = G \cdot \frac{l}{3} \quad (4)$$

și egalăm cu momentul forței rezultante (2) :

$$F \cdot x_0 = \frac{G}{2} \cdot x_0 = M = \frac{1}{3} G l,$$

de unde

$$x_0 = \frac{2}{3} l, \quad (5)$$

adică punctul de aplicație este la adâncimea $2/3$ din l , ceea ce era de așteptat deoarece presiunea crește liniar cu adâncimea.

** 1.8.42. Condiția de plutire :

$$\rho_e S H = \rho_a S (H - h), \text{ de unde } h = H(\rho_e - \rho_a) / \rho_a. \quad (1)$$

În poziția de echilibru, forța de greutate este echilibrată de forța arhimedică inițială, astfel încât dacă blocul este cufundat cu x față de linia de plutire, va apare o forță arhimedică suplimentară $F_A = \rho_a S x g$ împotriva căreia trebuie efectuat lucrul mecanic. La o cufundare elementară dx se efectuează lucrul mecanic elementar

$$dL = F_A dx = \rho_a S g x dx. \quad (2)$$

prin integrare obținem lucrul mecanic total :

$$L = \int dL = \int_0^h \rho_a S g x dx = \rho_a S g \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2 \rho_a} S H^2 (\rho_a - \rho_0)^2 g. \quad (3)$$

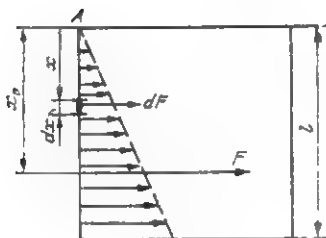


Fig. 1.8.41R

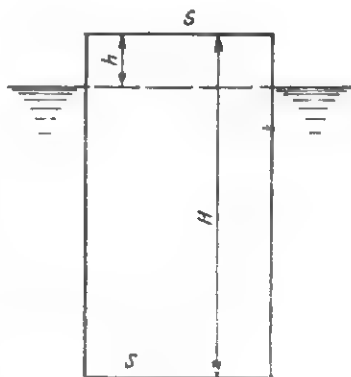


Fig. 1.8.42R

**** 1.8.43.** În regim staționar de rotație a lichidului asupra unui element de lichid de masă dm situat la suprafața liberă a lichidului acționează două forțe : greutatea $dm \cdot \vec{g}$ și reacțiunea normală $d\vec{N}$ din partea lichidului (forțele de frecare sînt neglijabile). Nu poate exista în regim staționar o componentă a reacțiunii lichidului, tangentă la suprafața lichidului.

Pe direcția radială :

$$dm \cdot g \tan \theta = dm \omega^2 y, \quad \tan \theta = \frac{1}{g} \omega^2 y. \quad (1)$$

Dar dacă ecuația liniei libere a lichidului din planul Oyz este $z = z(y)$, atunci $\tan \theta = dz/dy$, deci

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{g} \omega^2 y, \quad dz = \frac{1}{g} \omega^2 y dy. \quad (2)$$

Integrăm :

$$\int dz = z = \int \frac{1}{g} \omega^2 y dy = \frac{1}{2g} \omega^2 y^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine : pentru $y = 0$, avem $z = h$, deci $C = h$;

$$z = h + \frac{1}{2g} \omega^2 y^2. \quad (3)$$

Aceasta este o parabolă în planul Oyz și din simetria cilindrică rezultă că suprafața liberă a lichidului este un paraboloid de revoluție cu

axa Oz :

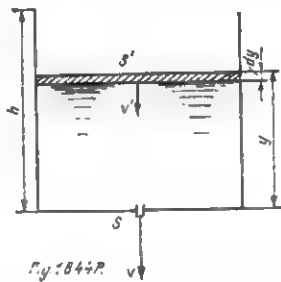
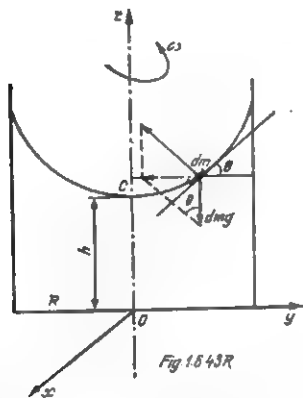
$$z = h + \frac{1}{2g} \omega^2(x^2 + y^2). \quad (4)$$

Presiunea într-un punct oarecare al lichidului (x, y, z) (în afară de presiunea atmosferică) este dată de presiunea hidrostatică a coloanei de lichid de deasupra, deci

$$p(x, y, z) = \rho g \left[h + \frac{1}{2g} \omega^2(x^2 + y^2) \right] - \rho g z = \rho g(h - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2(x^2 + y^2), \quad (5)$$

ceea ce reprezintă presiunea $\rho g(h - z)$ pe axa de rotație la nivelul punctului considerat plus presiunea „forțelor centrifuge” :

$$\int dp = \int_0^r \rho a_c dr = \int_0^r \rho \omega^2 r dr = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2(x^2 + y^2). \quad (6)$$



**** 1.8.44.** Fie la un moment dat t nivelul lichidului y . După un timp infinit mic dt , deci la momentul $t + dt$ nivelul lichidului va coborî cu $-dy$, deci volumul de lichid scurs va fi $S'(-dy)$. Acest volum se scurge prin orificiul S cu viteza dată de formula lui Torricelli :

$$v = \sqrt{2gy} : \sqrt{1 - S^2/S'^2}. \quad (1)$$

Cum debitul volumic este Sv , rezultă imediat :

$$S'(-dy) = Sv dt = S\sqrt{2gy} dt : \sqrt{1 - S^2/S'^2}.$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = -\frac{S'}{S} \sqrt{1 - S^2/S'^2} \frac{dy}{\sqrt{2gy}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

$$\int dt = t = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2}{g}} \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{y} + C),$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $y = h$, rezultă $C = -\sqrt{h}$, deci

$$t = \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right). \quad (2)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă):

$$\int_0^t dt = t = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1} \int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{y} - \sqrt{h}).$$

Dacă se scurge o fracțiune f din volum înseamnă că $(h-y)S = fhS$, $y = (1-f)h$, deci

$$t = \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}} (1 - \sqrt{1-f}). \quad (3)$$

Dacă $S \ll S'$, formula lui Forricelli se simplifică:

$$v = \sqrt{2gy}, \quad t = \frac{S'}{S} \sqrt{\frac{2h}{g}} (1 - \sqrt{1-f}). \quad (4)$$

Dacă se scurge întregul volum: $f = 1$.

(*) 1.8.45. Bătaia este

$$b = vt = \sqrt{2g(h-y)} \cdot \sqrt{2y/g} = 2\sqrt{(h-y)y}, \quad (1)$$

unde viteza este dată de formula lui Forricelli. Maximul lui b corespunde maximului cantității de sub radical a cărei derivată

$$h - 2y = 0 \text{ dă condiția } y = h/2, \quad b_{\max} = h. \quad (2)$$

Rezultatul se putea obține imediat știind că: dacă suma a doi termeni este constantă, atunci produsul lor este maxim cînd ei sînt egali:

$$h - y = y, \text{ de unde } y = h/2.$$

Forța reactivă se obține calculînd variația de impuls pe unitatea de timp. În timpul dt iese masa dm care duce impulsul $dm \cdot v$, deci forța

$$F = \frac{dm \cdot v}{dt} = Q_m v, \quad \left(\text{debitul masic } Q_m = \frac{dm}{dt} \right), \quad (3)$$

dar

$$Q_m = \rho S v, \quad (4)$$

prin urmare,

$$F = \rho S v^2 = \rho S \cdot 2g \frac{h}{2} = \rho g h S \quad (5)$$

(corespunzător presiunii hidrostatice pe fundul vasului).

Se putea aplica direct formula lui Meșcerski pentru forța reactivă:

$$\vec{F}_r = \vec{v}_{rei} \frac{dm}{dt},$$

în cazul nostru (3).

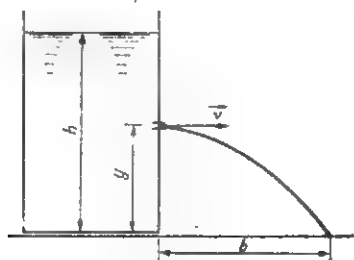


Fig. 1.8.45R

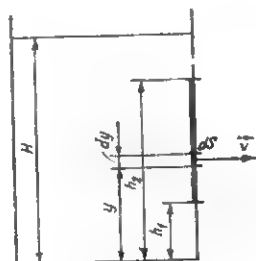


Fig. 1.8.46R

**** 1.8.46.** Forța reactivă asupra elementului de arie $dS = b dy$ este dată de variația (pierderea) de impuls prin această arie pe unitatea de timp. În unitatea de timp iese masa de lichid dată de debitul masic $dQ_m = \rho dS v$ care duce cu sine impulsul $dQ_m \cdot v$, deci forța reactivă asupra elementului de arie dS :

$$dF_r = dQ_m \cdot v = \rho dS v^2. \quad (1)$$

Conform formulei lui Forricelli $v^2 = 2g(H - y)$:

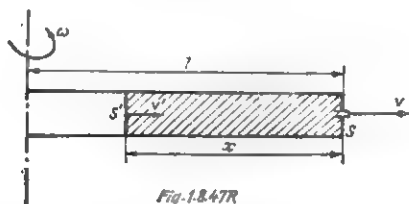
$$dF_r = \rho b dy \cdot 2g(H - y). \quad (2)$$

Prin integrare găsim forța cerută

$$\begin{aligned} F_r &= \int dF_r = \rho b \cdot 2g \int_{h_1}^{h_2} (H - y) dy = \rho b \cdot 2g \left[-\frac{1}{2} (H - y)^2 \right]_{h_1}^{h_2} = \\ &= \rho b \cdot 2g (h_2 - h_1) \left[H - \frac{1}{2} (h_1 + h_2) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

**** 1.8.47.** Vom rezolva problema în SR legat de tub. Atunci trebuie introduse forțe complementare: pe direcția radială va acționa forța centrifugă $m\omega^2 r$. Vom considera fluidul ideal (incompresibil și lipsit de vâscozitate) și vom aplica teorema variației energiei cinetice. Într-un timp infinit mic dt prin orificiu iese o masă elementară dm , totul se petrece ca și cum din secțiunea S' dispăre elementul de masă dm cu energia cinetică $dmv'^2/2$, iar în secțiunea S apare elementul de masă dm cu energia cinetică $dmv^2/2$, toate celelalte porțiuni intermediare de fluid neintervenind, deci ca și cum elementul dm a fost transportat în timpul dt din secțiunea S' în secțiunea S sub acțiunea forțelor centrifuge. Scriem că variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele aplicate. În SR considerat lucrul mecanic face numai forța centrifugă:

$$\frac{1}{2} dm v^2 - \frac{1}{2} dm v'^2 = \int_{r-x}^r dm \cdot \omega^2 r dr = dm \cdot \omega^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{r-x}^r = \frac{1}{2} dm \omega^2 (2lx - x^2). \quad (1)$$



Lichidul fiind incompresibil, ecuația de continuitate dă (debitul volumic este același peste tot):

$$S'v' = Sv. \quad (2)$$

Din cele două ecuații rezultă viteza de curgere în momentul când coloana de lichid are lungimea x :

$$v = \omega \sqrt{2lx - x^2} : \sqrt{1 - S^2/S'^2}. \quad (3)$$

Într-un timp infinit mic dt se scurge un volum elementar de lichid

$$dV = Sv dt = S'v' dt = -S' dx, \text{ căci } v' dt = -dx, \quad (4)$$

unde x este lungimea coloanei de lichid la un moment dat, iar v este dat de (3). Separăm variabilele și integram :

$$dt = -\frac{S'}{S} \frac{dx}{v} = -\frac{S' \sqrt{1 - \frac{S'^2}{S^2}}}{S \omega \sqrt{2lx - x^2}} dx. \quad (5)$$

Calculăm separat integrala :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2lx - x^2}} = \arccos \left(1 - \frac{x}{l} \right) + C, \quad (6)$$

atunci

$$\int dt = t = -\frac{1}{\omega} \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \left[\arccos \left(1 - \frac{x}{l} \right) + C \right], \quad (7)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = h$; rezultă $C = -\arccos (1 - h/l)$,

$$t = \frac{1}{\omega} \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \left[\arccos \left(1 - \frac{h}{l} \right) - \arccos \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]. \quad (8)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\begin{aligned} \int_0^t dt = t &= \int_h^x -\frac{1}{\omega} \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{2lx - x^2}} = \\ &= -\frac{1}{\omega} \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \cdot \arccos \left(1 - \frac{x}{l} \right) \Big|_h^x. \end{aligned}$$

Punind condiția $x = 0$, găsim timpul cerut de golire :

$$\tau = \frac{1}{\omega} \sqrt{S'^2/S^2 - 1} \cdot \arccos \left(1 - \frac{h}{l} \right) \approx \frac{1}{\omega} \frac{S'}{S} \arccos \left(1 - \frac{h}{l} \right). \quad (9)$$

**** 1.8.48.** Trebuie efectuat lucru mecanic împotriva forței arhimedice care excede greutatea, deci împotriva forței *ascensionale*. Să calculăm forța arhimedică dacă adâncimea de cufundare este y . Ea este egală cu greutatea volumului de lichid dezlăcut, adică a calotei sferice :

$$F_A = \rho g \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y) \quad (1)$$

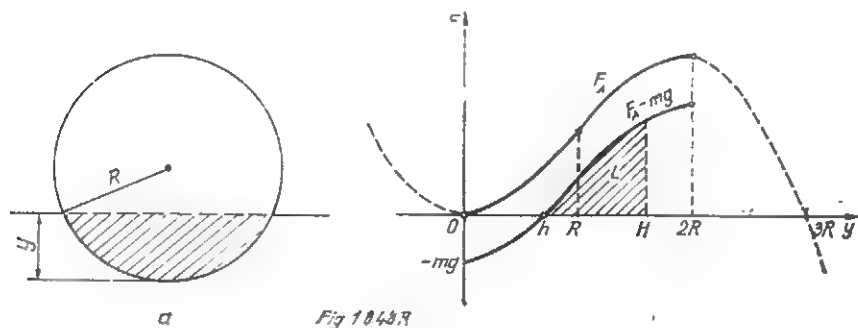


Fig 1.8.48

(vd. figura). Condiția de plutire dă :

$$mg = \rho g \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h). \quad (2)$$

Lucrul mecanic cerut :

$$L = \int (F_A - mg) dy. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad L &= \int_h^H \rho g \frac{\pi}{3} [3Ry^2 - y^3 - 3Rh^2 + h^3] dy = \\ &= \frac{\pi}{12} \rho g (H - h)^2 [4R(H + 2h) - (H^2 + 2Hh + 3h^2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Punînd aici $H = R$, găsim

$$L_a = \frac{\pi}{4} \rho g (R - h)^2 (R^2 + 2Rh - h^2), \quad (5)$$

pentru orice $h \in [0, 2R]$, $L \geq 0$.

b) Punem în (4) $H = 2R$:

$$L_b = \frac{\pi}{12} \rho g (2R - h)^2 (2R + 3h). \quad (6)$$

c) Punem în (4) $H = 0$:

$$L_c = \frac{\pi}{12} \rho g h^2 (8R - 3h). \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad L_d &= \int_0^{2R} (F_A - mg) dy = \int_0^h \dots + \int_h^{2R} \dots = L_b - L_c = \\ &= \frac{2\pi}{3} \rho g (R - h) (2R^2 + 2Rh - h^2). \end{aligned} \quad (8)$$

1.9. Oscilații și unde

Oscilații mecanice

$$1.9.1. \quad t = \frac{T}{2\pi} \arcsin f; \text{ pentru } f = 1/2, \quad t = T/12.$$

$$1.9.2. \quad t = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{1}{n}; \text{ pentru } n = 2, \quad t = T/6 = \frac{\pi}{3} \sqrt{l/g} = 0,33 \text{ s.}$$

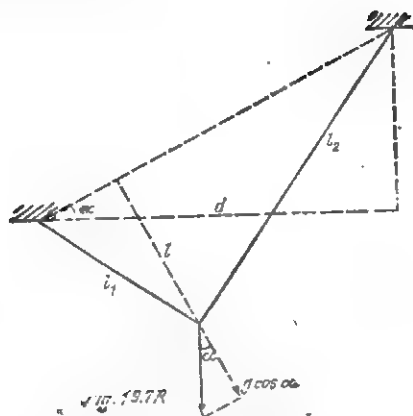
$$1.9.3. \quad t_1 = 2\sqrt{R/g} > t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{R/g}.$$

$$1.9.4. \quad \Delta t = D(T_0/T - 1) = -Df : (1 + f) = -8,6 \text{ s (întîrzie)}.$$

$$1.9.5. \quad \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} (2\pi r)^2 : (gT)^2 \text{ sau } \sin \frac{\alpha}{2} = \pi r / (gT), \quad \alpha = 60^\circ.$$

1.9.6. Scriptetele nu se rotește, deci perioada coincide cu perioada pendulului simplu gravitațional.

$$1.9.7. T = 2\pi\sqrt{l_1 l_2 / (g d)} = 1,0 \text{ s.}$$



$$1.9.8. a \approx (1/n^2)Lg : (4\pi^2l) = 1/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ m/s}^2.$$

$$1.9.9. N = [(1/\pi)\sqrt{2l : (g \tan \alpha)}] = 3.$$

* 1.9.10. $T = 2\pi\sqrt{l/g}$; deoarece accelerația g și perioada T se schimbă foarte puțin, putem calcula variațiile lor ca diferențiale. Calculăm derivata logaritmică (adică logaritmică și apoi diferențiem):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2} \frac{dg}{g}.$$

Conform principiului superpoziției cîmpul gravitațional deasupra zăcămintului poate fi calculat ca suprapunerea cîmpului creat de Pămînt considerat global omogen de densitate ρ_0 :

$$g_0 = \gamma M/R^2 = \gamma \rho_0 \frac{4\pi}{3} R \quad (2)$$

și a cîmpului suplimentar creat de zăcămintul sferic considerat de densitate $\rho - \rho_0$:

$$\Delta g = \gamma(\rho - \rho_0) \frac{4\pi}{3} r^3/h^2. \quad (3)$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = -\frac{1}{2} \gamma(\rho - \rho_0) \frac{4\pi}{3} \frac{r^3}{h^2} : \left[\gamma \rho_0 \frac{4\pi}{3} \frac{1}{R} \right] = \\ &= -\frac{n-1}{2} \frac{r^3}{h^2 R} \approx 10^{-4} = 10^{-2} \%. \end{aligned} \quad (4)$$

$$1.9.11. t = \tau/3 = 0,10 \text{ s.}$$

$$1.9.12. T = 2\pi\sqrt{\Delta l/g} = 0,40 \text{ s.}$$

$$1.9.13. x_0 = g/(4\pi^2 v^2) = 6,0 \text{ cm.}$$

$$1.9.14. v = \sqrt{2g \left(h - l + \frac{mg}{2k} \right)} = 7,0 \text{ m/s.}$$

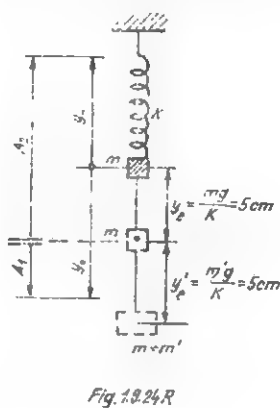
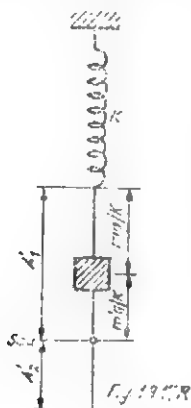
$$1.9.15. F_2 = F_1/2 = 100 \text{ N.}$$

$$1.9.16. T = 2\pi \frac{l}{L} \sqrt{m/k} = 0,31 \text{ s.}$$

$$1.9.17. T'/T = \sqrt{1 + m'/m}; \quad A'/A = |1 \pm m'/m| = 3,0, \text{ resp. } 1,0.$$

$$1.9.18. T = 2\pi\sqrt{m_1 A / (m_2 g)} = 0,31 \text{ s.}$$

1.9.19. $A = |mg/k - x_0|$, $x_{\text{ech}} = mg/k$; $x_{\text{min}} = x_0$, $x_{\text{max}} = 2mg/k - x_0$ dacă $x_0 \leq mg/k$; $x_{\text{min}} = 2mg/k - x_0$, $x_{\text{max}} = x_0$ dacă $x_0 \geq mg/k$; $Q = \frac{1}{2} k A^2$.



1.9.20. În ambele cazuri: $N_{\text{max}} = mg(M + 2m) : (M + m) = 1,33mg = 6,54 \text{ N}$, $N_{\text{min}} = mgM : (M + m) = 0,67mg = 3,27 \text{ N}$.

$$1.9.21. Q_2 = Q_1 m_2^2 / m_1^2 = 200 \text{ mJ.}$$

$$1.9.22. A = m_2 g / k = 10 \text{ cm}, Q = \frac{1}{2} k A^2 = 50 \text{ mJ.}$$

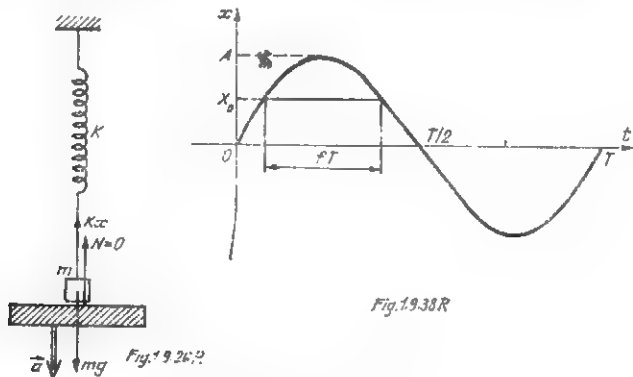
$$1.9.23. A = m_2 g / k = 10 \text{ cm}, Q = k A^2 / 2 = 0,50 \text{ J.}$$

1.9.24. a) $y_e = mg/k = 5,0 \text{ cm}$, $A_1 = y_0 - mg/k = 5,0 \text{ cm}$, resp. 15 cm , $v' = v_0 m' : (m + m') = 1,5 \text{ m/s}$. b) $y_e' = m' g / k = 5,0 \text{ cm}$, $A_1' = \sqrt{(m + m')/k} \cdot v' = 15 \text{ cm}$, resp.

$A_2' = \sqrt{(A_2 + y_e')^2 + (m + m') v'^2 / k} = 25 \text{ cm}$. c) $Q = k A'^2 / 2 = 0,11 \text{ J}$, resp. $0,31 \text{ J}$.

1.9.25. $y_a = (m + M)g/k = 15 \text{ cm}$, $v_a^2 = k^2 (y_0^2 - y_a^2) : (m + M)^2 = 7/6 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $h = y_a + v_a^2 / (2g) = 21 \text{ cm}$, $A' = [M v_a^2 / k + (y_a - mg/k)^2]^{1/2} = 14,7 \text{ cm}$.

$$1.9.26. t = \sqrt{2m(g-a)/(ka)} = 0,10 \text{ s}, x_{\text{max}} = \frac{m}{k} (g + \sqrt{a(2g-a)}) =$$



$$= 0,1 \text{ cm}, A = \frac{m}{k} \sqrt{a(2g-a)} = 4,2 \text{ cm.}$$

$$1.9.27. \mu = k(s_1 - s_2)/(mg) = 0,090.$$

$$1.9.28. A = dk_2 : (k_1 + k_2) = 2,5 \text{ cm},$$

$$v_m = k_2 d : \sqrt{m(k_1 + k_2)} = 1,0 \text{ m/s}.$$

$$1.9.29. t = L/v_0 + \pi\sqrt{m/(2k)} = 2,3 \text{ s}.$$

$$1.9.30. A = 6l \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,33 \text{ m}, T = 2\pi \sqrt{\left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot 6l/g} = 1,50 \text{ s}.$$

$$1.9.31. b = \mu mg/k = 2,0 \text{ mm}, (2n-1)b < A < (2n+1)b, n = 20, s = [kA^2 - (A-2nb)^2] : (2\mu mg) = 1,64 \text{ m}, t = n\pi \sqrt{m/k} = 2,84 \text{ s}.$$

$$1.9.32. s_1 = r_0 \sqrt{l/(\mu g)} = 1,00 \text{ m}, t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{l/(\mu g)} = 1,57 \text{ s}; b) s_2 = s_1(\sqrt{2}-1) = 0,41 \text{ m}, t_2 = t_1/2 = 0,78 \text{ s}.$$

$$1.9.33. \tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{l/(\mu g)} = 0,78 \text{ s}, v_0 = \sqrt{\mu gl} = 0,49 \text{ m/s}.$$

$$1.9.34. \tau = \sqrt{l/(\mu g)} \cdot \arcsin(\sqrt{\mu gl}/v_0) + \sqrt{v_0^2 - \mu gl}/(\mu g) = 1,13 \text{ s}.$$

$$1.9.35. t = \pi : \sqrt{bg \cos \alpha} = 1,85 \text{ s}; s = (2/b)lg\alpha = 1,17 \text{ m}.$$

$$1.9.36. \omega = \sqrt{k/m} \pm \mu g/l = 5,0 \text{ rad/s, resp. } 4,0 \text{ rad/s, } (\mu mg < kl).$$

$$1.9.37. T' = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A} \right) = 0,60 \text{ s}.$$

$$1.9.38. \alpha_0 = A \sin \left[(1-2f) \frac{\pi}{2} \right] = \frac{A}{2}.$$

$$1.9.39. \tau = n \cdot 2\pi \sqrt{m/k} = 0,3 \cdot n, n \in \mathbb{N}.$$

$$1.9.40. \tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{mM : [k(m+M)]} = 1,4 \text{ s}.$$

$$1.9.41. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + 2kh/(mg)} = 37,5 \text{ cm}.$$

$$1.9.42. A'/A = \sqrt{M : (M+m)} = 0,80.$$

$$1.9.43. A = \mu g(m+M)/(2k) = 10 \text{ cm}.$$

$$1.9.44. F = (M+m)g = 14,7 \text{ N}.$$

$$1.9.45. \mu > 2T : [(M+m_1+m_2)g] = 0,40.$$

$$1.9.46. T = 2\pi \sqrt{(m+M/2) : k} = 0,62 \text{ s}.$$

$$1.9.47. T = 2\pi \sqrt{(m+4M) : k} = 1,26 \text{ s. (I negligible)}.$$

$$1.9.48. a) A = \mu g : [\omega^2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] = 1,2 \text{ mm}; b) A = g : [\omega^2 \cos \alpha] = 3,6 \text{ mm}.$$

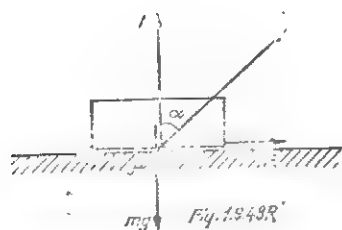


Fig. 1.9.39

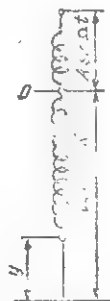


Fig. 1.9.38

•• 1.9.49. Legea fundamentală a mecanicii se scrie astfel :

$$F = ma, \text{ unde } a = \ddot{y} \text{ și } F = -ky + kA_0 \sin \Omega t. \quad (1)$$

Obținem ecuația diferențială

$$m\ddot{y} + ky = kA_0 \sin \Omega t. \quad (2)$$

Această ecuație liniară (în y și în derivatele sale) cu coeficienți constanți și cu partea dreaptă are ca soluție generală *suma* dintre soluția *generală* a ecuației *fără* partea dreaptă plus o soluție *particulară* a ecuației *complete*. Soluția generală a ecuației (2) *fără* partea dreaptă $m\ddot{y} + ky = 0$ este binecunoscută :

$$y = A \sin (\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad (3)$$

unde A (amplitudinea) și α (faza inițială) sunt determinate de condițiile inițiale.

Soluția particulară a ecuației complete (2) este *de același tip* ca și funcția din partea dreaptă :

$$y = B \sin (\Omega t + \beta). \quad (4)$$

Calculând derivata

$$\ddot{y} = -\Omega^2 B \sin (\Omega t + \beta) \quad (5)$$

și introducând-o în (2) trebuie să avem *identic* :

$$-m\Omega^2 B \sin (\Omega t + \beta) + kB \sin (\Omega t + \beta) \equiv kA_0 \sin \Omega t,$$

de unde rezultă :

$$\beta = 0 \text{ și } B = kA_0 : (k - m\Omega^2) = A_0 : (1 - \Omega^2/\omega^2), \quad (6)$$

deci soluția particulară

$$y = \frac{A_0}{1 - \Omega^2/\omega^2} \sin \Omega t. \quad (7)$$

Datorită pierderilor inevitabile de energie din sistem (datorită frecărilor), în locul oscilațiilor sinusoidale (3) vom avea de fapt oscilații *amortizate*, care după un anumit timp, până la urmă, dispar și rămân numai oscilațiile „forțate” de tip (7) (cu termen corectiv pentru frecări), oscilații care reprezintă *regimul permanent* de oscilație (cu amplitudine constantă și cu frecvența forței exterioare). Se vede că pentru $\Omega < \omega$ bila și punctul superior oscilează în fază, iar pentru $\Omega > \omega$ — în opoziție de fază. La *rezonanță* $\Omega \rightarrow \omega$, amplitudinea oscilațiilor tinde la infinit (fiindcă n-am ținut seama de pierderile de energie).

* 1.9.50. Fiind vorba de micile oscilații vom considera unghiul α *foarte mic*, ceea ce ne permite să facem aproximațiile de mai jos. Energia cinetică a halterei se obține considerând o rotație infinitezimală a halterei cu viteza unghiulară $\omega = \dot{\alpha}$ la limită în jurul CM, astfel încât vitezele bilelor sunt

$$v = \frac{l}{2} \omega = \frac{l}{2} \dot{\alpha} \text{ și energia cinetică :}$$

$$E_c = 2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{4} ml^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\alpha}^2, \quad \mu = ml^2/2. \quad (1)$$

Analog, energia potențială (luind CM) :

$$E_p = (2m) gh = 2mg [R\alpha \sin \alpha - (R - R \cos \alpha)]. \quad (2)$$

Pentru a obține E_p până la aproximația de ordinul II trebuie să luăm $\sin \alpha \approx \alpha$ și $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, ceea ce dă

$$E_p = 2mg[R\alpha^2 - R + R(1 - \alpha^2/2)] = mgR\alpha^2 = \frac{1}{2} x\alpha^2, \quad x = 2mgR. \quad (3)$$

În aproximația de ordinul I $E_p = 0$, ceea ce justifică și aproximațiile de la calculul lui E_c . Reamintim următoarele :

Dacă un sistem are un singur grad de libertate caracterizat de coordonata generalizată s , atunci E_c și E_p se scriu :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu \dot{s}^2, \quad E_p = \frac{1}{2} \kappa s^2, \quad (4)$$

unde μ este „masa” și κ — „constanta elastică” corespunzătoare coordonatei s . Atunci, sistemul fiind conservativ, forța generalizată

$$F = - \frac{d}{ds} E_p = - \kappa s \quad (5)$$

este de tip elastic și energia totală se conservă :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \kappa s^2 = \text{const} \quad (6)$$

pe care derivînd-o în raport cu timpul, obținem ecuația diferențială cunoscută a oscilatorului armonic :

$$\mu \ddot{s} + \kappa s = 0 \text{ sau } \mu \ddot{s} + \kappa s = 0, \quad (7)$$

adică oscilații sinusoidale în coordonata s cu frecvența și perioada :

$$\omega^2 = \kappa/\mu, \quad T = 2\pi\sqrt{\mu/\kappa}. \quad (8)$$

În cazul nostru, din (1) și (3) rezultă :

$$T = 2\pi\sqrt{(ml^2/2) : (2mgR)} = \pi l : \sqrt{gR} = 1,57 \text{ s.}$$

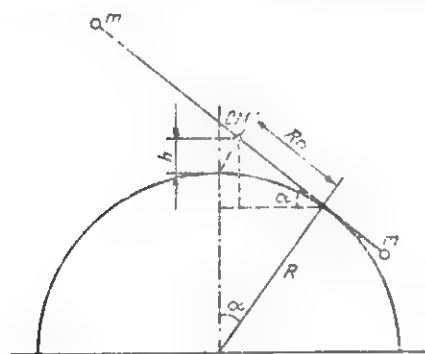


Fig. 1.9.50R

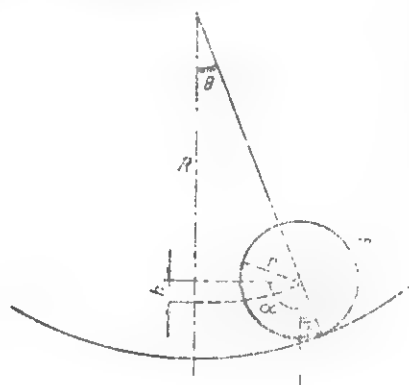


Fig. 1.9.51

* 1.9.51. Oscilațiile fiind de mică amplitudine, unghiul θ este foarte mic și putem face aproximațiile de mai jos. Energia potențială a cercului :

$$E_p = mgh = mg(R-r)(1 - \cos\theta), \quad (1)$$

dar

$$\cos\theta \cong 1 - \theta^2/2,$$

$$E_p \cong mg(R-r)\theta^2/2 = \frac{1}{2} \kappa \theta^2, \quad \kappa = mg(R-r), \quad (2)$$

E_p este de ordinul II infinitesimal.

Energia cinetică :

$$E_c \cong \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (3)$$

unde I este momentul de inerție al cercului față de punctul de contact cu cilindrul. Conform teoremei lui Steiner :

$$I = I_0 + mr^2 = 2mr^2. \quad (4)$$

Viteza unghiulară $\omega = \dot{\alpha}$, dar trebuie s-o exprimăm prin $\dot{\theta}$. Observăm că prin rostogolire fără alunecare avem :

$$r(\alpha + \theta) = R\theta, \text{ de unde prin derivare :}$$

$$r\dot{\alpha} = (R-r)\dot{\theta} \quad (5)$$

și deci energia cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} 2mr^2 \cdot \left(\frac{R-r}{r} \dot{\theta} \right)^2 + m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\theta}^2, \quad \mu = 2m(R-r)^2. \quad (6)$$

Conform problemei precedente 1.9.50 :

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{2m(R-r)^2 : [mg(R-r)]} = 2\pi/\sqrt{2(R-r)g} = 1,88 \text{ s.}$$

* 1.9.52. Oscilațiile fiind mici, unghiul θ este foarte mic și putem face aproximațiile de mai jos. Problema de față este de fapt problema precedentă 1.9.51 „inversată”.

Energia potențială :

$$E_p = Mgh = Mg(R-r)(1 - \cos\theta) \cong Mg(R-r) \frac{\theta^2}{2}. \quad (1)$$

Energia cinetică :

$$E_c \cong \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_0 + MR^2) \dot{\theta}^2 = MR^2 \dot{\theta}^2, \quad (2)$$

unde I este momentul de inerție al cercului față de punctul de contact cu cilindrul și am aplicat teorema lui Steiner. Conform problemei 1.9.50 :

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{2MR^2 : [Mg(R-r)]} = 2\pi \frac{R}{R-r} \sqrt{2(R-r)/g} = 4,0 \text{ s.}$$

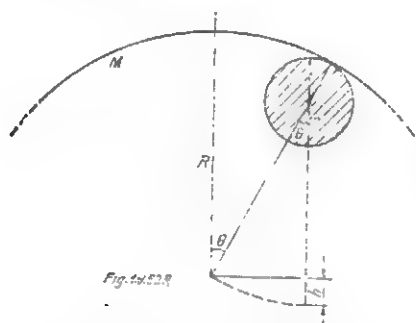


Fig. 1.9.52.R

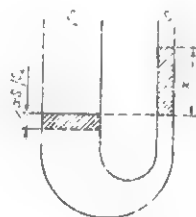


Fig. 1.9.52.P

$$* \quad 1.9.53. E_p = \rho g S_1 x \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} S_1/S_2 \right) - \frac{1}{2} \mu x^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left(m \frac{S_1}{S_1 + S_2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(m \frac{S_2}{S_1 + S_2} \right) (\dot{x} S_1/S_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \frac{S_1}{S_1 + S_2} (1 + S_1/S_2) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\mu : [(S_1 + S_2) \rho g]} = 2,0 \text{ s.}$$

$$1.9.54. l \sim 2\pi n R / v \sim 0,3 \text{ mm.}$$

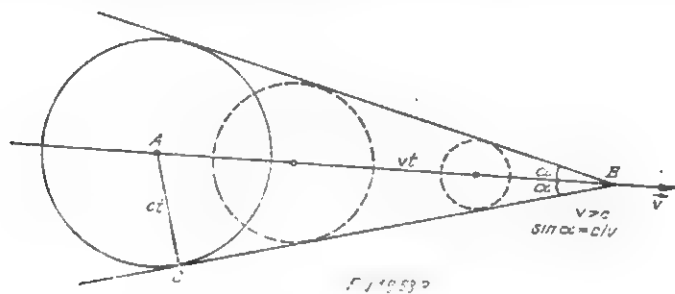
$$1.9.55. l = T^2 g : (4\pi^2) = 1,0 \text{ m.}$$

Unde elastice

$$1.9.56. c = \frac{\lambda}{2} (v_1 + v_2) = 15 \text{ m/s, } v = \frac{\lambda}{2} (v_1 - v_2) = 5,0 \text{ m/s.}$$

1.9.57. Faza este aceeași pentru toate particulele între două noduri consecutive și variază cu π când trecem printr-un nod.

$$1.9.58. \text{ Con cu semideschiderea } \alpha = \arcsin(c/v), d = h\nu/c = 10 \text{ km.}$$



$$1.9.59. n = c/\sqrt{\rho E} = 0,065.$$

$$** \quad 1.9.60. a) w_c = \frac{dW_c}{dV_0} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV_0} v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2, \quad (1)$$

unde dV_0 este elementul de volum nedeformat (în absența undei) și ρ_0 densitatea în absența undei (a mediului nedeformat). Dar

$$v = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \cos(kx + \beta) \sin(\omega t + \alpha), \quad (2)$$

$$w_c = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \cos^2(kx + \beta) \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

deci

$$\langle w_c \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2 \cos^2(kx + \beta). \quad (4)$$

$$b) W_p = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} F dx = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} [S_0 E (x - l_0) : l_0] dx = (S_0 E / l_0) \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} (x - l_0) d(x - l_0) = \frac{1}{2} \frac{S_0 E}{l_0} (x - l_0)^2 \Big|_{l_0}^{l_0 + \Delta l} = \frac{1}{2} S_0 l_0 E (\Delta l / l_0)^2 = \frac{1}{2} V_0 E \epsilon^2, \quad (5)$$

de unde

$$w_p = \frac{W_p}{V_0} = \frac{1}{2} E \epsilon^2, \quad (6)$$

unde E este modulul de elasticitate (Young), iar ϵ — deformația elastică relativă.

Deformația $\epsilon(x, t)$ într-un anumit punct x la un anumit moment t se calculează astfel (vd. figura). Luăm în punctul x un strat de grosime

nedeformată dx , transversal pe direcția de propagare. La momentul t el se va găsi deplasat și va avea grosimea :

$$dx + u(x + dx, t) - u(x, t).$$

Scăzând de aici grosimea inițială nedeformată dx , obținem alungirea $u(x + dx, t) - u(x, t)$ și raportând-o la lungimea inițială nedeformată $(l - l_0) : l_0 = \varepsilon$, obținem alungirea relativă sau deformația elastică :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (7)$$

Știind că viteza undelor longitudinale

$$c = \sqrt{E/\rho_0}, \quad (8)$$

găsim

$$w_p = \frac{1}{2} c^2 \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} c^2 \rho_0 k^2 A^2 \sin^2(kx + \beta) \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (9)$$

dar

$$k = \omega/c, \quad (10)$$

rezultă

$$\langle w_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(kx + \beta). \quad (11)$$

$$c) \langle w \rangle = \langle w_c \rangle + \langle w_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2. \quad (12)$$

$$1.9.61. \quad v_d = \Delta v : (1 - \sqrt{F_1/F_2}) = 100 \text{ Hz.}$$

$$1.9.62. \quad v_d = \Delta v/f = 1000 \text{ Hz.}$$

$$1.9.63. \quad l = c/(4v) = 0,34 \text{ m, } v' = 2v = 500 \text{ Hz.}$$

$$1.9.64. \quad v_3 = 3v = 1320 \text{ Hz, } v'_2 = 3v/2 = 660 \text{ Hz.}$$

$$1.9.65. \quad N = 10^{\Delta L/10} = 100.$$

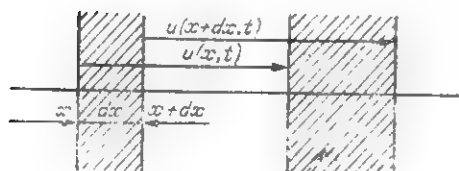


Fig. 1.9.61.R

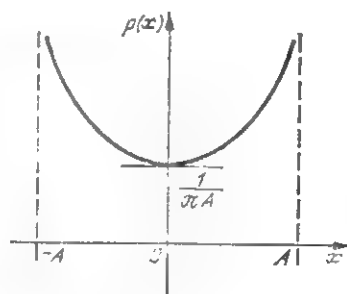


Fig. 1.9.66.R

**** 1.9.66.** Probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$ este proporțională cu timpul dt cât se găsește particula în acest interval :

$$dP(x) = p(x)dx = Cdt, \quad p(x) = \frac{C}{dx/dt} = \frac{C}{v(x)}, \quad (1)$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) = \pm \omega A \sqrt{1 - x^2/A^2} = -\omega \sqrt{A^2 - x^2}, \quad (2)$$

$$p(x) = \frac{C}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (3)$$

Constanta C se obține din condiția de normare: probabilitatea de a găsi particula oriunde pe intervalul $(-A, A)$ este 1 (certitudine!):

$$1 = \int_{-A}^A dP = \int_{-A}^A p(x) dx = \int_{-A}^A \frac{C dx}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{C}{\omega} \left[\arcsin \frac{x}{A} \right]_{-A}^A = \frac{C}{\omega} 2 \frac{\pi}{2}, \text{ de unde } C = \frac{\omega}{\pi},$$

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (1)$$

Probabilitatea de a găsi particula la extremitățile $x = \pm A$ este foarte mare fiindcă acolo particula zăbovește mai mult: viteza scade către zero, particula se oprește și se întoarce, pe cînd prin centrul $x = 0$ particula trece cu viteză maximă (vd. figura)

* **1.9.67.** Ecuația traiectoriei:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (1)$$

o elipsă parcursă în sens trigonometric.

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad a_y = -\omega^2 y, \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}, \quad (2)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r} = -k\vec{r}, \quad (3)$$

forța este de tip elastic cu constanta cuasielastică

$$k = m\omega^2 \text{ și } T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (4)$$

** **1.9.68.** În SR neinerțial legat de lift trebuie să introducem forța complementară $-m\vec{a}$. Ecuația fundamentală a mecanicii se scrie atunci astfel:

$$m\ddot{x} = -kx + mBt \text{ sau } \ddot{x} + \omega^2 x = Bt, \quad \omega^2 = k/m. \quad (1)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale cu partea dreaptă este egală cu soluția generală a ecuației fără partea dreaptă plus o soluție particulară a ecuației complete. Soluția generală a ecuației fără partea dreaptă este binecunoscuta oscilație armonică

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

cu două constante de integrare A (amplitudinea), α (faza inițială). Soluția particulară a ecuației complete este de obicei de același tip ca și partea dreaptă. În cazul nostru se vede imediat că

$$x = \frac{B}{\omega^2} t \quad (3)$$

verifică ecuația, prin urmare

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{B}{\omega^2} t, \quad (4)$$

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) + B/\omega^2. \quad (5)$$

Determinăm constantele de integrare din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $x = 0, v = \dot{x} = 0$:

$$0 = A \sin \alpha, \quad 0 = \omega A \cos \alpha + B/\omega^2, \text{ de unde } \alpha = 0, A = -B/\omega^3, \quad (6)$$

$$x = \frac{B}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m}. \quad (7)$$

**** 1.9.69.** Ecuațiile diferențiale ale mișcării :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + F \text{ pentru } t \leq \tau, \\ m\ddot{x} &= -kx \text{ pentru } t \geq \tau. \end{aligned} \quad (1)$$

În primul caz putem scrie

$$(x - F/k)'' + \frac{k}{m} (x - F/k) = 0. \quad (2)$$

Aceasta este binecunoscuta ecuație diferențială a oscilatorului armonic cu soluția

$$\begin{aligned} x - F/k &= A \cos (\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \\ v = \dot{x} &= -\omega A \sin (\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

unde constantele de integrare A , α se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = 0$:

$$-F/k = A \cos \alpha, \quad 0 = -\omega A \sin \alpha, \quad \alpha = 0, \quad A = -F/k. \quad (4)$$

Atunci soluția devine

$$x = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad t \leq \tau. \quad (5)$$

În al doilea caz soluția este cea a oscilatorului armonic :

$$x = B \cos [\omega(t - \tau) + \beta], \quad t \geq \tau. \quad (6)$$

Pentru $t = \tau$ cele două soluții trebuie să dea același x și v (trebuie să se racordeze) :

$$x|_{t=\tau} = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega \tau) = B \cos \beta, \quad (7)$$

$$v|_{t=\tau} = \dot{x}|_{t=\tau} = \frac{F}{k} \omega \sin \omega \tau = -\omega B \sin \beta.$$

Eliminând pe $\sin \beta$, $\cos \beta$ (prin ridicare la pătrat și adunare : $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$), obținem amplitudinea cerută :

$$B = \frac{F}{k} \sqrt{2 - 2 \cos \omega \tau} = \frac{2F}{k} \left| \sin \frac{\omega \tau}{2} \right|, \quad \omega = \sqrt{k/m}. \quad (8)$$

Amintim că prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul n diferențial (care conține derivatele funcției până la ordinul n) apar n constante de integrare, care se determină din condițiile „inițiale” ca pentru o anumită valoare a argumentului, funcția și primele sale $n-1$ derivate să ia valori date. În cazul mecanicii ecuația diferențială este de ordinul doi ($a = \ddot{x} = F/m$), deci prin integrare apar două constante care se determină din condițiile inițiale ca pentru $t = t_0$, coordonata (funcția) și viteza (prima derivată) să ia valori date (poziția inițială și viteza inițială).

**** 1.9.70.** Vom calcula energia potențială și cinetică a sistemului resort-corp în funcție de coordonata x și viteza \dot{x} a corpului.

Energia potențială :

$$E_p = - \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (1)$$

Alungirile $\xi(r)$ ale punctelor resortului cresc linear de la zero la x de-a lungul resortului :

$$\xi(r) = x \frac{r}{l}, \quad (0 \leq r \leq l), \quad (2)$$

de unde viteza punctelor resortului :

$$v(r) = \dot{\xi}(r) = \dot{x} \frac{r}{l}. \quad (3)$$

Energia cinetică a unui element de masă $dm' = \frac{m'}{l} dr$ va fi atunci

$$\frac{1}{2} dm' v^2 = \frac{1}{2} \frac{m'}{l} dr \dot{x}^2 \frac{r^2}{l^2} \quad (4)$$

și energia cinetică totală :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m'}{l^3} \dot{x}^2 \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m'}{3} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2. \quad (5)$$

Frecvența unghiulară și perioada oscilațiilor rezultă acum imediat :

$$\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{k : (m + m'/3)}, \quad T = 2\pi \sqrt{(m + m'/3) : k}, \quad (6)$$

ca și cum o *treime* din masa resortului se adaugă la masa corpului.

**** 1.9.71.** Principiul II al dinamicii se scrie :

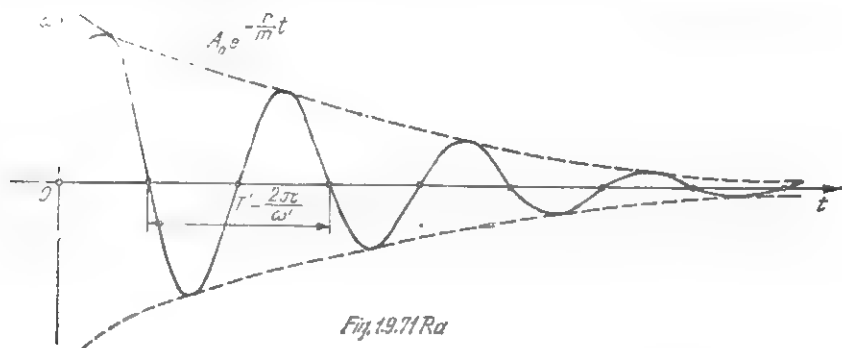


Fig. 19.71 Ra

$$ma = -kx - rv \text{ sau } m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (1)$$

unde $\sqrt{k/m} = \omega$ este frecvența unghiulară a oscilatorului armonic în absența forțelor de frecare. Transcriem ecuația astfel :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \frac{r}{2m} \dot{x} + \left(\frac{r}{2m} \right)^2 x + \left(\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2} \right) x = 0. \quad (2)$$

Primii trei termeni se pot restringe ca derivata unui produs, în adevăr,

$$(xe^{r/(2m)})' = \left(\dot{x}e^{r/(2m)} + \frac{r}{2m} x e^{r/(2m)} \right)' = \ddot{x} e^{r/(2m)} + 2 \frac{r}{2m} \dot{x} e^{r/(2m)} + \left(\frac{r}{2m} \right)^2 x e^{r/(2m)}.$$

Această derivată se poate scrie dintr-o dată cu ajutorul formulei lui Leibnitz pentru derivata de ordinul n a unui produs de două funcții. Acum

Înmulțim ecuația (2) cu $e^{rt/(2m)}$ („factor integrant”) și obținem

$$(x e^{rt/(2m)})'' + \left(\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2} \right) (x e^{rt/(2m)}) = 0. \quad (3)$$

Această ecuație este foarte bine cunoscută: este a oscilatorului armonic. S-o transcriem astfel:

$$(x e^{rt/(2m)})'' + \left(\omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} \right) (x e^{rt/(2m)}) = 0, \quad (4)$$

$$(\ddot{y} + \omega'^2 y = 0).$$

Avem de considerat trei cazuri:

$$a) \quad \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} > 0 \text{ sau } \omega'^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} > 0, \quad (5)$$

$$\text{sau } r < 2\sqrt{mk},$$

avem în acest caz ecuația diferențială a oscilatorului armonic cu soluția cunoscută

$$x e^{rt/(2m)} = A_0 \cos(\omega' t + \alpha), \quad (6)$$

unde A și α sînt constantele de integrare;

$$x = A_0 e^{-rt/(2m)} \cos(\omega' t + \alpha) = A \cos(\omega' t + \alpha), \quad (7)$$

$$A = A_0 e^{-rt/(2m)}.$$

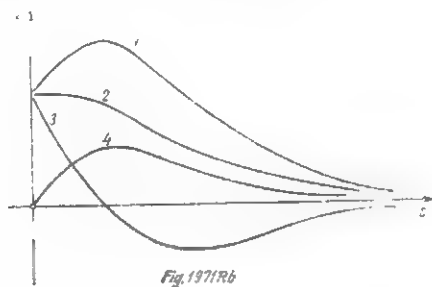
Acestea sînt oscilații *amortizate pseudoperiodice* cu pseudofrecvența unghiulară:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - r^2/(4m^2)} = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} \quad (8)$$

și cu amplitudinea descrescătoare exponențial. Observăm că datorită frecărilor care se opun mișcării și o întîrzie, perioada crește, deci frecvența scade (8).

Se numește *timp de relaxare* (sau „timp de viață”) a oscilațiilor, timpul în care amplitudinea oscilațiilor se reduce de $e = 2,718$ ori:

$$\tau = 2m/r. \quad (9)$$



$$b) \text{ Cazul } \omega^2 - r^2/(4m^2) < 0 \text{ sau } r > 2\sqrt{mk}. \quad (10)$$

În acest caz soluția este (vd. problema 1.2.134):

$$\begin{aligned} x e^{rt/(2m)} = A_0 \operatorname{ch} \left(\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2} \cdot t + \alpha \right) = C_1 \exp \left\{ \sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2} \cdot t \right\} + \\ + C_2 \exp \left\{ -\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2} \cdot t \right\}, \end{aligned}$$

unde se poate trece ușor de la constantele de integrare A_0 , α la constantele $C_{1,2}$. Mișcarea este *amortizată aperiodică* (vd. figura):

$$x = e^{-rt/(2m)} (C_1 e^{\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2} \cdot t}). \quad (11)$$

$$c) \text{ Cazul } \omega^2 - r^2/(4m^2) = 0 \text{ sau } r = 2\sqrt{mk}, \quad (12)$$

este un caz excepțional (de interes teoretic):

$$(xe^{r/(2m)})'' = 0, \quad (xe^{r/(2m)})' = C_1, \quad xe^{r/(2m)} = C_1 t + C_2, \\ x = (C_1 t + C_2)e^{-r/(2m)}, \quad (13)$$

unde am făcut integrări succesive. Mișcarea se numește *aperiodică critică* (graficele seamănă cu fig. 1.9.71 R, b).

**** 1.9.72.** Conform principiului fundamental:

$$ma = -kx - rv + F_0 \cos \Omega t \text{ sau } \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (1)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale liniare se compune din soluția *generală* a ecuației *fără* partea dreaptă plus o soluție *particulară* a ecuației *complete*. Soluția generală a ecuației fără partea dreaptă reprezintă oscilațiile libere amortizate, studiate în problema precedentă **1.9.71**:

$$x = A_0 e^{-r/(2m)} \cos(\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} \cdot t + \alpha). \quad (2)$$

Soluția particulară este de același tip cu partea dreaptă:

$$x = B \cos(\Omega t + \beta), \quad (3)$$

unde constantele B, β se determină din condiția ca această soluție să verifice ecuația diferențială (1);

$$\dot{x} = -\Omega B \sin(\Omega t + \beta), \quad \ddot{x} = -\Omega^2 B \cos(\Omega t + \beta),$$

$$B(k/m - \Omega^2) \cos(\Omega t + \beta) - \frac{r}{m} \Omega B \sin(\Omega t + \beta) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t,$$

$$(k/m - \Omega^2) B \cos(\Omega t + \beta) + \frac{r}{m} \Omega B \cos\left(\Omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (4)$$

Cele două oscilații din stînga egalității, compuse fiind, trebuie să dea identic oscilația din dreapta. Știm că

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

unde

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Aplicînd aceste formule obținem:

$$(F_0/m)^2 = (k/m - \Omega^2)^2 B^2 + (r^2/m^2) \Omega^2 B^2 + 2(k/m - \Omega^2) B(r/m) \Omega B \cos \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0 = \frac{(k/m - \Omega^2) B \sin \beta + (r/m) \Omega B \sin(\beta + \pi/2)}{(k/m - \Omega^2) B \cos \beta + (r/m) \Omega B \cos(\beta + \pi/2)},$$

de unde rezultă

$$B = \frac{F_0}{m \sqrt{(k/m - \Omega^2)^2 + \Omega^2 r^2/m^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{-\Omega r/m}{k/m - \Omega^2} \quad (7)$$

$$\text{sau } B = \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} = \frac{F_0}{\Omega Z}, \quad Z = \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega} = \frac{r}{X_m - X_k}, \quad X_m = \Omega m, \quad X_k = \frac{k}{\Omega}, \quad (9)$$

unde $X_m = \Omega m$ este reactanța *inercială* analogă reactanței inductive $X_L = \omega L$ (masa m corespunde inductanței L), $X_k = k/\Omega$ este reactanța *elastică* analogă reactanței capacitive $X_C = 1/(\omega C)$, (constanta elastică k

corespunde inversului capacității $1/C$), Z este impedanța *mechanică* analogă impedanței electrice (coeficientul de rezistență r corespunde rezistenței electrice R). Analogia dintre mărimile mecanice și cele electrice merge și mai departe: elongația x corespunde sarcinii electrice q de pe condensator, viteza $v = \dot{x}$ corespunde intensității curentului electric $i = \dot{q}$, forța f corespunde tensiunii u , etc.

Revenim la soluția generală:

$$x = A_0 e^{-r/(2m)} \cos(\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} \cdot t + \alpha) + \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right). \quad (10)$$

După trecerea unui timp suficient de lung, ca ordin de mărime $\tau = \frac{2m}{r}$ (timpul de relaxare sau timpul de viață), oscilațiile proprii amortizate se sting și rămân în sistem numai oscilațiile „forțate” (3). Prin urmare, la început avem un *regim tranzitoriu* în care coexistă oscilațiile proprii cu pseudofrecvența

$$\omega' = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} = \sqrt{\omega^2 - r^2/(4m^2)} \quad (11)$$

și cu *coeficientul de amortizare*

$$b = \frac{r}{2m} = \frac{1}{\tau} \quad (12)$$

și oscilațiile forțate (3). După stingerea oscilațiilor proprii rămâne *regimul permanent* sau staționar în care există numai oscilațiile *forțate* (întreținute):

$$x = \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right), \quad (13)$$

$$v = \dot{x} = -\frac{F_0}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t + \arctg \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right) =$$

$$= \frac{F_0}{Z} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right) = \frac{F_0}{Z} \cos\left(\Omega t - \arctg \frac{\Omega m - k/\Omega}{r}\right) = \frac{F_0}{Z} \cos(\Omega t - \varphi), \text{ unde } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega m - k/\Omega}{r} = \frac{X_a - X_k}{r}. \quad (14)$$

Să studiem puțin *oscilațiile forțate*:

— Oscilațiile forțate sînt sinusoidale și *nu sînt amortizate* (sînt întreținute, au amplitudinea constantă), deși în sistem există forțe de frecare, disipative, care transformă ireversibil energia mecanică în căldură.

— Frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența forței periodice aplicate.

— Amplitudinea și defazajul oscilațiilor forțate depind de structura sistemului oscilant (m , k) și de *frecvența* forței exterioare aplicate și *nu depind* de condițiile inițiale.

Spre deosebire de acestea, oscilațiile proprii sînt amortizate, au frecvența proprie determinată de parametrii sistemului, amplitudinea și faza lor sînt determinate de condițiile inițiale.

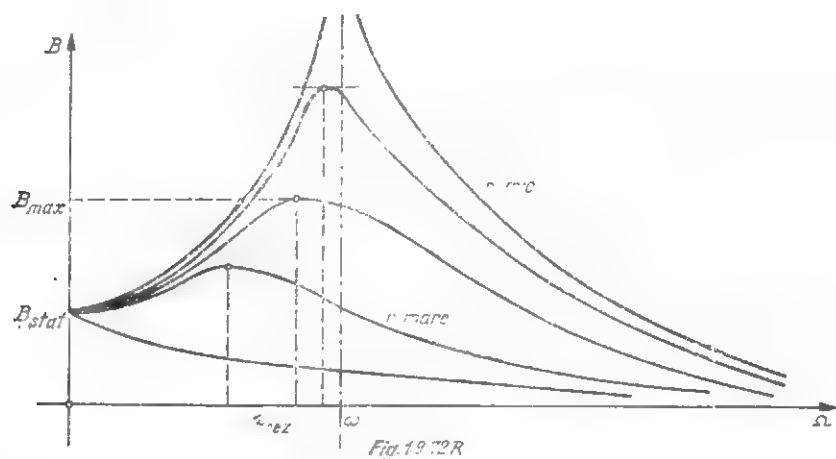
Puterea dezvoltată de forța periodică aplicată:

$$P = f \cdot v = F_0 \cos \Omega t \cdot v_0 \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0^2}{Z} \cos \Omega t \cos(\Omega t - \varphi) \quad (15)$$

și puterea medie (pe o perioadă):

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{Z} \langle \cos \Omega t \cdot \cos (\Omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos \varphi, \quad (16)$$

unde $\cos \varphi$ este „factorul de putere”. Observați analogia cu puterea din curent alternativ.



Dacă frecvența Ω a forței exterioare variază, amplitudinea oscilațiilor forțate (7) variază și atinge un maxim la rezonanță (vd. figura). Condiția de maxim a lui B este anularea derivatei sale. Putem deriva doar expresia de sub radical de la numitor în raport cu Ω^2 :

$$-\frac{d}{d(\Omega^2)} [\Omega^2 r^2 + (k - m\Omega^2)^2] = r^2 + 2(k - m\Omega^2)(-m) = 0,$$

$$\Omega = \sqrt{k/m - r^2/(2m^2)} = \omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega^2 - r^2/(2m^2)} < \omega = \sqrt{k/m}. \quad (17)$$

Aceasta este rezonanța elongațiilor (analogul rezonanței tensiunilor în curent alternativ), întrucât la această frecvență amplitudinea elongațiilor B este maximă (atunci și forța elastică este maximă). Pentru aceasta trebuie ca amortizările să nu fie prea mari:

$$r < \sqrt{2mk}. \quad (18)$$

La rezonanța elongațiilor amplitudinea maximă este

$$B_{\text{max}} = \frac{F_0}{r\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)}} = \frac{F_0}{r\omega'}, \quad \text{tg } \varphi_m = \frac{-r}{2m\omega_{\text{rez}}} < 0. \quad (19)$$

Ca efect al rezonanței amplitudinea oscilațiilor este mai mare decât elongația statică produsă de forța constantă F_0 :

$$B_{\text{stat}} = \frac{F_0}{k}, \quad \frac{B_{\text{max}}}{B_{\text{stat}}} = \frac{\sqrt{mk}}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/(4mk)}} = Q \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/(4mk)}},$$

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{mk} = Z_0/r, \quad (\text{analogul lui } Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C}), \quad (20)$$

unde Q este „factorul de calitate” al sistemului oscilant analog lui $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ din curent alternativ, iar $Z_0 = \sqrt{mk}$ este impedanța caracteristică a sistemului oscilant (analogul lui $Z_0 = \sqrt{L/C}$).

Dacă amortizările sînt mici, $r \ll \sqrt{mk}$, rezonanța este foarte ascuțită, B_{\max} este foarte mare față de B_{stat} , ($Q \gg 1$).

După cum se vede din (14) maximul amplitudinii vitezei are loc pentru frecvența

$$\Omega = \omega = \sqrt{k/m}, \text{ cînd } X = X_m = X_k = \Omega m = k/\Omega = 0, \quad (21)$$

atunci

$$v_{0\max} = \frac{F_0}{r}, \quad (Z \rightarrow r), \quad (22)$$

aceasta este rezonanța vitezelor: amplitudinea vitezei este maximă, (analogul rezonanței curenților din curent alternativ), dar în acest caz amplitudinea elongațiilor B nu mai este maximă, ci

$$B_0 = \frac{F_0}{\omega r} < B_{\max} = \frac{F_0}{\omega' r}, \quad \omega' < \omega. \quad (23)$$

La rezonanța vitezelor:

$$\frac{B_0}{B_{\text{stat}}} = \frac{1}{r} \sqrt{mk} = Q = \text{factor de calitate}. \quad (24)$$

Prin urmare, trebuie să distingem rezonanța elongațiilor cînd amplitudinea B a oscilațiilor este maximă la frecvența (17):

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{k/m - r^2/(2m^2)} < \omega' = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} < \omega = \sqrt{k/m} \quad (25)$$

și rezonanța vitezelor cînd amplitudinea v_0 a vitezei este maximă la frecvența $\Omega = \omega = \sqrt{k/m}$, egală cu frecvența oscilațiilor proprii, libere, în absența amortizării.

Dacă coeficientul de rezistență r este foarte mic: $r \ll \sqrt{mk}$, atunci cele două rezonanțe practic coincid și au loc pentru frecvența $\Omega \cong \omega$, maximul amplitudinii la rezonanță va fi foarte mare și curba de rezonanță va fi foarte ascuțită (pentru $r \rightarrow 0$, $B_{\max} \rightarrow \infty$). Din (7) se vede că defazajul β dintre oscilațiile forțate și forța aplicată este negativ, adică oscilațiile forțate totdeauna *întîrzie* față de forța exterioară. Cînd $\Omega < \omega = \sqrt{k/m}$, defazajul β este în cadranul IV. Cînd Ω crește, defazajul β crește în modul. Cînd trecem prin rezonanța vitezelor $\Omega = \omega$, $\beta = -\pi/2$: elongația este în cuadratură cu forța, în timp ce defazajul φ (14) dintre forță și viteză este zero, adică viteza este în fază cu forța și deci puterea dezvoltată (15) este tot timpul pozitivă. Cînd $\Omega > \omega$, $\beta < -\pi/2$, β trece din cadranul IV în cadranul III, iar cînd $\Omega \rightarrow \infty$, $\beta = -\pi$, adică la frecvențe foarte înalte elongația este în opoziție de fază cu forța.

La rezonanța vitezelor ($\Omega = \omega$) forța aplicată $f = F_0 \cos \Omega t$ devine egală în modul și de sens opus cu forța disipativă de frecare $f_r = -r\dot{x} = -rv$. În adevăr, din (14) rezultă imediat

$$f_r = -rv = -r \frac{F_0}{Z} \cos \left(\Omega t - \arctg \frac{\Omega m - k/\Omega}{r} \right) \xrightarrow{\Omega = \omega} -F_0 \cos \omega t = -f.$$

Puterea dezvoltată de forța aplicată (analogă puterii ui din curent alternativ) este (15):

$$P = fv = \frac{1}{Z} F_0^2 \cos \Omega t \cdot \cos (\Omega t - \varphi),$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} F_0^2 \cos \varphi = \frac{1}{2} r F_0^2 / Z^2, (\cos \varphi = r/Z). \quad (26)$$

Pe de altă parte, puterea disipată (în căldură) (analogă lui Ri^2 din curent alternativ):

$$P_r = -f_r v = rv^2 = r(F_0^2/Z^2) \cos^2(\Omega t - \varphi), \quad (27)$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} r F_0^2 / Z^2 = \langle P \rangle.$$

În regim permanent sau staționar puterea mecanică medie care intră în sistemul oscilant este egală cu puterea medie disipată sub formă de căldură. Mai mult, la *rezonanța vitezelor* puterea mecanică absorbită este în fiecare moment egală cu puterea disipată în acel moment:

$$P = \frac{1}{r} F_0^2 \cos^2 \omega t = P_r, \Omega = \omega, f = -f_r, \quad (28)$$

și aceste puteri sînt *maxime*, ca și valorile lor medii:

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} F_0^2 / r = \langle P_r \rangle_{\max}, (Z \rightarrow r). \quad (29)$$

La *rezonanța vitezelor* sistemul oscilant se comportă ca un oscilator armonic ideal: ca și cum n-ar fi forța disipativă și nici cea externă aplicată:

$$f_r = rv = f = F_0 \cos \Omega t, \text{ dacă } \Omega = \omega, \text{ deci } m\ddot{x} = -kx.$$

Energia cinetică și energia potențială ale sistemului:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mB^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \beta), \quad (30)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mB^2 \omega^2 \cos^2(\Omega t + \beta),$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mB^2 [\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \beta) + \omega^2 \cos^2(\Omega t + \beta)]. \quad (31)$$

energia totală devine constantă la rezonanța vitezelor:

$$E = \frac{1}{2} mF_0^2 / r^2 \text{ dacă } \Omega = \omega. \quad (32)$$

* * *

ANEXE

GENERALE

1. FORMULE DE APROXIMAȚIE

$$(1+x)(1+y)(1+z) \dots \approx 1+x+y+z+\dots$$

dacă

$$|x| \ll 1, |y| \ll 1, |z| \ll 1, \dots,$$

formula se obține desfacând parantezele și neglijând termenii de grad superior, care sînt mici.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{1-x^2} \approx 1-x, \quad \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2} \approx 1+x, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{b}{a} \right), \text{ dacă } |b| \ll |a|, \text{ adică } \left| \frac{b}{a} \right| \ll 1,$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a} \left(1 \pm \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

dacă $|b| \ll a, a > 0$.

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots}{(1+y_1)(1+y_2)(1+y_3)\dots} \approx 1+x_1+x_2+x_3+\dots-y_1-y_2-y_3-\dots,$$

dacă $|x_i| \ll 1, |y_i| \ll 1$.

Mai general:

$$(1+x)^r \approx 1+rx+\frac{1}{2}r(r-1)x^2 \approx 1+rx, \text{ dacă } |x| \ll 1,$$

r — număr real de ordinul unităților, de exemplu,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \approx 1+\frac{x}{2}, \text{ dacă } |x| \ll 1, (r = -1/2).$$

Pentru alte funcții:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \approx x; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \approx 1; \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \approx x,$$

unde x în radiani, $|x| \ll 1$ rad, adică $x \lesssim 6^\circ$,

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'', 8 \approx 57^\circ.$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \approx 1 + x, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a, \text{ dacă } |x \ln a| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \approx x, \text{ dacă } |x| \ll 1.$$

2. ALFABETUL GRECESC

alfa	α	A	niu	ν	N
beta	β	B	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	\omicron	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ϵ	E	ro	ρ	P
zeta	ζ	Z	sigma	σ, ς	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
teta	θ, ϑ	Θ	ypsilon	υ	Y
iota	ι	I	fi	ϕ	Φ
kapa	κ	K	hi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
miu	μ	M	omega	ω	Ω

3. MULTIPLI ȘI SUBMULTIPLI

Multipli			Submultipli		
		Unități			Unități
deca-	da-	10	deci-	d-	10 ⁻¹
hecto-	h-	10 ²	centi-	c-	10 ⁻²
kilo-	k-	10 ³	mili-	m-	10 ⁻³
mega-	M-	10 ⁶	micro-	μ -	10 ⁻⁶
giga-	G-	10 ⁹	nano-	n-	10 ⁻⁹
tera-	T-	10 ¹²	pico-	p-	10 ⁻¹²
peta-	P-	10 ¹⁵	femto-	f-	10 ⁻¹⁵
exa-	E-	10 ¹⁸	ato-	a-	10 ⁻¹⁸

4. CÎTEVA UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Li rul cu simbolul L este definit astăzi ca fiind identic cu 1 dm³.

Anul-lumină: 1 an-lum. = 9,5 · 10¹³ km.

Parsecul 1 parsec = 30,8 · 10¹³ km.

Torrul sau mm Hg este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la temperatura de 0°C în câmpul gravitațional normal $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} &= [\rho g h] = 13595,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m} = \\ &= 133,322 \text{ Pa} \cong 133,3 \text{ Pa} \cong \frac{400}{3} \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Densitatea mercurului la 0°C: $13595,1 \text{ kg/m}^3$ și la 20°C: $13545,9 \text{ kg/m}^3$.

Atmosfera fizică :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} \cong 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Milimetrul coloană de apă :

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} \cong 9,8 \text{ Pa} \cong 13,6 \text{ torr},$$

$$1 \text{ atm} = 10,33 \text{ m H}_2\text{O}.$$

Caloria internațională :

$$1 \text{ cal}_{\text{IT}} = \frac{1}{860} \text{ Wh} = 4,1868 \text{ J}; 1 \text{ J} \cong 0,24 \text{ cal}.$$

Kelvinul, unitate de temperatură termodinamică, este fracțiunea $1/273,16$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

Relația dintre scările Kelvin și Celsius :

$$T[\text{K}] = 273,15 + t[^\circ\text{C}] = T_0 + t = \frac{1}{\alpha} + t,$$

unde $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1} = 0,003661 \text{ K}^{-1}$ este coeficientul de dilatare izobară a gazului perfect.

Unitatea atomică de masă :

$$\begin{aligned} 1\text{u} &= \frac{1}{12} \text{ masa atomului } {}^{12}_6\text{C} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = \\ &= 931,4943 \text{ MeV} = 1,4924191 \cdot 10^{-10} \text{ J}, \end{aligned}$$

$$1\text{u} \cong 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 931,5 \text{ MeV} \cong 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

$1\text{u} = 10^{-3}/N_A$, unde $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ — constanta lui Avogadro.

Molul este cantitatea de substanță (materie) a unui sistem care conține atâtea entități elementare cîți atomi există în 12 g de carbon 12. Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupe specificate de asemenea particule.

Masa molară μ [kg/mol] și masa moleculară M [u] sint legate prin relația :

$$\mu[\text{kg/mol}] = 10^{-3} M[\text{u}].$$

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența $540 \cdot 10^{12}$ Hz și a cărei intensitate energetică în această direcție este de $1/683$ W/sr.

Becquerelul este unitate SI pentru activitatea (A) unui radionuclid :

$$1\text{Bq} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

Unitatea menținută temporar *curie* : $1\text{Ci} = 3.7 \cdot 10^{10}$ Bq.

Grayul este unitate SI pentru doza absorbită (D) de radiații ionizante :

$$1\text{Gy} = 1 \text{ J/kg}.$$

Unitatea menținută temporar : $1 \text{ rad} = 10^{-2}$ Gy.

Sievertul este unitate SI pentru echivalent de doză absorbită (P) :

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg}.$$

Unitatea menținută temporar : $1 \text{ rem} = 10^{-2}$ Sv.

Röntgenul este o unitate specială menținută temporar și folosită pentru a exprima expunerea la radiațiile X sau γ :

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}.$$

Doza echivalentă (B) servește pentru evaluarea pericolului iradierii și este egală cu doza absorbită (D) înmulțită cu coeficientul mediu de calitate Q a iradierii unui țesut biologic :

Forma radiației	Q
Raze X și γ	1
Electroni și pozitroni	1
Neutroni cu $E < 20$ keV	3
Neutroni cu $0,1 \text{ MeV} < E < 10 \text{ MeV}$	10
Radiații α	20

Fondul natural al radiației produce o putere a dozei de expunere între 1 și 5 nC/(kg.h) sau între 10 și 50 $\mu\text{C}/(\text{kg.an})$.

Doze permise maxime :

Toată viața	1 an	3 lun	1 săptămână
300 mSv	50 mSv	30 mSv	1 mSv

5. CONSTANTE FUNDAMENTALE

Viteza luminii în vid în sisteme de referință inerțiale :

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Constanta lui Planck :

$$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \cong 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0545727 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \cong 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}.$$

Sarcina elementară :

$$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cong 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Constanta gravitațională :

$$\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2.$$

Constanta lui Boltzmann :

$$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cong 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Constanta lui Avogadro :

$$N_A = 10^{23}/u = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cong 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Constanta universală a gazelor :

$$R = kN_A = 8,314510 \text{ J/(mol.K)} \cong 8,3 \text{ J/(mol. K)}.$$

Condiții normale ale gazelor înseamnă :

temperatură normală : $T_0 = 273,15 \text{ K} = 0,00^\circ\text{C}$,

presiune normală : $p_0 = 101325 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 1 \text{ atm}$.

Volumul molar al gazului perfect în condiții normale :

$$V_{u0} = RT_0/p_0 = 22,4141 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol} \cong 22,4 \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

Numărul lui Loschmidt :

$$L = p_0/(kT_0) = N_A/V_{u0} = 2,68676 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \cong 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Permitivitatea vidului :

$$\epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}.$$

Permeabilitatea vidului :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cong 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}, \epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2.$$

Constanta lui Faraday :

$$F = N_A e = 9,6485309 \cdot 10^4 \text{ C/Eq} \cong 96,5 \cdot 10^3 \text{ C/Eq}.$$

Masa de repaus a electronului :

$$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cong 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Sarcina specifică a electronului :

$$e/m_e = 1,75881962 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}.$$

Masa de repaus a protonului :

$$m_p = 1,6726231 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

$$m_p/m_e = 1836,152701 \cong 1836.$$

Masa de repaus a neutronului :

$$m_n = 1,6749286 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

$$m_n/m_e = 1838,683662 \cong 1838,7.$$

$$\text{Constanta lui Rydberg : } R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0 h^3 c} = 1,0973731534 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1},$$

$$R_H = 1,09677583 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}, R \cong 1,10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Raza primei orbite Bohr :

$$r_1 = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 5,29177249 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cong 0,53 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Lungimea de undă Compton :

$$\text{a electronului } \Lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2,42631058 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cong 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m},$$

$$\text{a protonului } \Lambda_p = \frac{h}{m_p c} = 1,32141002 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cong 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Raza clasică a electronului :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} = 2,817941 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cong 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Constanta structurii fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137,036} \approx \frac{1}{137}.$$

Magnetonul lui Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,92740154 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \approx 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}.$$

Magnetonul nuclear :

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,0507866 \cdot 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \approx 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T}.$$

1. MECANICĂ

1.1. Cîteva date asupra Pămîntului

Presiunea atmosferică normală	101325 Pa
Densitatea aerului uscat în CN	1,2928 kg/m ³
Viteza sunetului în aer uscat în CN	331,4 m/s
Accelerația gravitațională: normală	9,80665 m/s ²
la nivelul mării și paralela 45°	9,80616 m/s ²
la ecuator	9,7805 m/s ²
la poli	9,8322 m/s ²
Raza ecuatorială a Pămîntului	6378 km
Raza polară a Pămîntului	6357 km
Volumul Pămîntului	1,087 · 10 ²¹ m ³
Raza medie a Pămîntului	6371 km
Densitatea medie a Pămîntului	5522 kg/m ³
Mașa Pămîntului	5,983 · 10 ²⁴ kg
Aria uscatului (29,2% din suprafața terestră)	1,49 · 10 ⁸ km ²
Aria oceanelor (70,8% din suprafața terestră)	3,61 · 10 ⁸ km ²
Volumul oceanelor	1,37 · 10 ⁹ km ³
Mașa atmosferei	5,27 · 10 ¹⁸ kg
Viteza unghiulară medie de rotație a Pămîntului	7,292 · 10 ⁻⁵ rad/s
Perioada rotației proprii	23 h 56 min 4,1 s
Cîmpul magnetic terestru B	5,7 · 10 ⁻⁵ T
Momentul magnetic dipolar al Pămîntului	8,1 · 10 ²² A · m ³
Viteza orbitală medie a Pămîntului	29,770 km/s
Distanța medie pînă la Soare	149,46 · 10 ⁶ km
Durata anului	365,26 zile
Înclinarea ecuatorului față de orbită	23° 27'
Distanța pînă la Lună	384,4 · 10 ³ km
Accelerația gravitațională, pe Lună	1,62 m/s ²
pe Soare	271 m/s ²
Densitatea fluxului de energie radiantă solară pe suprafața Pămîntului	1340 W/m ²

1.2. Densitățile unor substanțe în kg/m³

*Solide (la temperatura camerei: 17÷23°C)
(ultimele două cifre nu sînt peste tot exacte)*

Alamă	8400÷8500	Quart topit trans-		Nichelina	8800
Alnico	7100	parent	2200	Nicrom	8300÷8400
Aluminiu	2700	Cupru	8890	Nylon	1140
Argint	10400	Diamant	3500	Oțel carbon	
Asfalt	1400	Duraluminu	2800	(<1 % C)	7800
		Ebonită	1200	Oțel moale	7900
Aur	19300	Fier	7800		
„ 22 carate	17500	Fontă	7000÷7100	Parafină	900
„ 9 „	11300			Permalloy	8600
Azbest	2400	Gelatină	1300	Platină	21450
Bachelită	1250÷1340	Gheață (0°C)	917	Platină-iridiu	21500
Beton	2200	Grafit	2300	(90/10)	
		Granit	2700	Plexiglas	1180÷1200
Cărămidă	1800	Invar	8000	Plumb	11340
Cărbune antracit	1600	Lemn uscat:		Plută	200÷250
„ bitumen	1400	„ bambuc	400	Polietilenă	920÷930
Cărbune de lemn	400	„ brad	600	Polistiroi	1054÷1070
„ „ retortă	1900	Lemn uscat:		Porțelan	2300
Cauciuc	940	„ cedru	550	Sare de bucătărie	2100
		„ fag	750	Smoală	1100
Ceară de albine	950	„ mesteacăn	700	Spat de Islanda	2700
„ „ laborator	1000	„ pin	500	Sticlă	2400÷2800
Ceară roșie	1800	„ stejar	700÷800	Sulf (amorf)	1920
Celuloid	1350÷1400	Manganină	8400÷8500	Supermalloy	8900
Conușă de lemn	750	Marmură	2700	Wolfram (sîrmă)	19300
Chiblumbur	1100	Mercur solid	14190	Zinc	7000÷7100
Constantan	8900	(-39°C)			
Cositor	7300	Mica	2800÷2900		
Cretă	2400	Neusilber	8400		
Quart cristalin	2600	Nichel	8800÷8900		
„ topit semi-					
transparent	2100				

Lichide (la 15°C)

Acetonă	792	Benzen	850÷880	Sulfură de carbon	1200
Acid sulfuric		Benzină	700÷900	Terebentină	850÷870
concentrat	1830	Eter	720÷736	Ulei animal	900
Aer lichid		Glicerină	1260	„ de in	950
(-194°C)	860	Lapte	1030	„ măsline	920
Alcool etilic	791	Petrol	800	Ulei de parafină	800
„ metilic	810	„ lampant		„ ricin	950
Anilină	1020÷1030	(kerosin)	780÷800		
Apă de mare	1025÷1030				
Argint lichid	930				
Aur lichid	17200				

Gaze (în condiții normale)

Acetilenă	1,170	Bioxid de carbon	1,9768	Hidrogen sulfurat	1,539
Acid clorhidric	1,639	Brom	7,139	Kripton	3,68
Aer	1,2928	Clor	3,220	Metan	0,7167
Amoniac	0,7708	Fluor	1,690	Necun	0,900
Argon	1,783	Heliu	0,1785	Oxid de carbon	1,2502
Azot	1,251	Hidrogen	0,0899	Oxigen	1,429
Bioxid de azot	1,980			Xenon	5,85

1.3. Densitatea apei (în kg/m³) la diferite temperaturi

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$
-4	999,5	3 sau 5	999,965	60	982,31
-3	999,6	4	999,973	70	977,79
-2	999,7	10	999,700	80	971,80
-1	999,8	20	998,203	90	965,31
0	999,841	30	995,646	100	958,35
1 sau 7	999,902	40	992,21	150	917,3
2 sau 6	999,941	50	988,04	200	862,8

1.4. Proprietățile elastice ale unor materiale (la 18°C)

Materialul	Modulul Young $E, 10^{10} \text{ N/m}^2$	Modulul de alunecare $G, 10^{10} \text{ N/m}^2$	Coef. Poisson μ	Modulul de compresib. $K, 10^{10} \text{ N/m}^2$
Aluminiu	7,05	2,62	0,345	7,58
Argint	8,27	3,03	0,367	10,4
Aur	7,8	2,7	0,44	21,7
Bronz (66 % Cu)	~10	~3,5	~0,37	11,2
Gauric	~0,00032	~0,00010	~0,47	—
Constantan				
(60 % Cu + 40 % Ni)	16,3	6,11	0,327	15,7
Cuarț	7,3	3,1	0,17	3,7
Cupru	12,98	4,833	0,343	13,76
Fier	21,2	8,2	0,29	16,9
Fontă	~11,5	~4,4	~0,27	9,6
Manganină	12,4	4,65	0,334	12,4
Nichel	20,4	7,9	0,280	16,1
Oțel (1 % C)	21,0	8,10	0,293	16,88
Oțel moale	21,0	8,12	0,291	16,78
Platina	16,8	6,1	0,377	22,8
Plumb	1,62	0,562	0,441	4,6
Sticlă	~6	3,1	~0,25	3,75
Zinc	9,0	3,6	0,25	6,0

Gheața (-2°C) $E = 0,28 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; stejar $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; pin $E = 0,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; mase plastice $E \sim 0,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

1.5. Coeficienți de frecare la alunecare μ

Bronz pe bronz	0,20	Curea de piele pe roată de fontă	0,56
Bronz pe fontă (slab uns)	0,19	Oțel pe gheață	0,02
Lemn pe lemn (stejar)	0,50	Oțel pe oțel	0,13
Lemn pe pământ uscat	0,71	Cărbune pe cupru	0,25
Cărămidă pe cărămidă	0,65	Fontă pe fontă (slab uns)	0,15

1.6. Viteza sunetului (în m/s)

Solide

c_l — viteza undelor longitudinale într-o bară,

c_l' — viteza undelor longitudinale într-un mediu nemărginit,

c_t — viteza undelor transversale.

	c_l	c_l'	c_t
Alamă	3400	4500	2100
Aluminiu	5240	6400	3130
Argint	2800	3700	1694
Cupru	3600	4700	—
Fier	5130	5900	—
Lemn	3600 ÷ 4000	—	—
Nichel	4900	—	—
Oțel	5100	6000	—
Platină	2800	3960	—
Sticlă (crown)	5000	5700	3300
Zinc	3800	4170	—

Valori extreme: granit 6000

cauciuc vulcanizat (0°C) 54

Lichide

Acetonă	25°C	1170	Heliu	— 269,8°C	179,8
Alcool etilic	20°C	1177	Mercur	20°C	1451
„ metilic	20°C	1122	Petrol	25°C	1225
Anilină	20°C	1659	Sulfura de carbon	25°C	1149
Apă	0°C	1407	Tetraclorură de carbon	25°C	930
Benzen	25°C	1295	Toluen	25°C	1300

Gaze (0°C)

Aer (uscat)	331,46	H ₂	1286	N ₂	333,64
CO	337,6	O ₂	315	CH ₄	430
CO ₂	260	NH ₃	415		

BIBLIOGRAFIE

1. A. Hristev, V. Fălie, D. Manda — *Manual de Fizică*, cl. IX, Ed. Did. Ped., București 1980–1990.
2. A. Hristev, D. Borșan, D. Manda, M. Sandu, L. Georgescu, V. Gherbanovschi — *Probleme de Fizică pentru cl. IX–X*, Ed. Did. Ped., București 1983, ed. II-a, 1991.
3. A. Hristev — *Probleme de Termodinamică, Fizică moleculară și Căldură*, Ed. II-a, Ed. Tehnică, București 1988.
4. A. Hristev — *Mecanica și Acustica*, Ed. II-a, Ed. Did. Ped., București 1984.
5. A. Hristev, V. Fălie — *Elemente de Mecanică*, Ed. Did. Ped., București 1973.
6. A. Hristev — *Noțiuni de Termodinamică*, Ed. Did. Ped., București 1974.
7. C. Plăvișu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, C. Stănescu, L. Ionescu, R. Moldovan — *Probleme de Mecanică fizică și Acustică*, Ed. II-a, Ed. Did. Ped., București 1981.
8. C. Plăvișu, I. Petrea, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, R. Moldovan — *Fizica moleculară — probleme*, Ed. III-a, Ed. Did. Ped., București 1981.
9. N. Bărbulescu, I. Dima, I. Petrea, M. Cojocaru, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, R. Moldovan, C. Stănescu — *Teoria cinetico-moleculară a gazelor*, Ed. St., București 1972.
10. I. Ioviț Popescu, A. Hristev, V. Gherbanovschi, C. Enescu — *Mic Memorator de Fizică*, Ed. III-a, Ed. Tehnică, București 1991.
11. M. Gall, A. Hristev — *Probleme date la Olimpiadele de Fizică*, Ed. Did. Ped., București 1978.
12. A. Hristev — *Probleme de Fizică date la examene*, Ed. Tehnică, București 1984.
13. A. Hristev — *Despre spin*, *Gaz. Mat. Fiz.*, vol. VIII, nr. 7, 1956, pag. 361.
14. A. Hristev — *Valori îmbunătățite ale constantelor fizice*, *Rev. Fiz. Chim.*, vol. II, nr. 8, 1965, pag. 289.
15. A. Hristev — *Constantele fizice*, *Rev. Fiz. Chim.*, vol. IX, nr. 4, 1972, pag. 121.
16. Revista „Kvant”, URSS.
17. A. Hristev — *Probleme de fizică pentru învățământul mediu*, Editura ICAR, București, 1991.
18. A. Hristev — *Probleme rezolvate de fizică*, Editura E.V.&A., București, 1991.

De același autor urmează să apară în continuare în aceeași serie :

vol. 2. TERMODINAMICA ȘI FIZICĂ MOLECULARĂ

vol. 3. ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM

vol. 4. OPTICA. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

SUMAR

	Enun- țuri	Rezol- vări
	pag.	pag.
Introducere		3

Vol. I. MECANICA

<i>Breviar</i>	7	
1.1. Principiile mecanicii	12	89
1.2. Cinematica și dinamica punctului material		
Mișcarea rectilinie uniformă	15	90
Mișcarea rectilinie uniform variată	17	94
Mișcarea sub acțiunea greutateii	20	97
Forțe de frecare	23	106
Mișcarea circulară	31	137
Forțe elastice	38	153
Cîmpul gravitațional	42	169
1.3. Energia mecanică	43	175
1.4. Impulsul mecanic	53	197
1.5. Momentul cinetic	64	207
1.6. Mecanica rigidului	67	211
1.7. Echilibrul mecanic	69	213
1.8. Mecanica fluidelor		
Hidrostatica	76	246
Hidrodinamica	79	250
1.9. Oscilații și unde		
Oscilații mecanice	80	257
Unde elastice	87	264

ANEXE

Generale

1. Formule de aproximație	275
2. Alfabetul grecesc	276
3. Multipli și submultipli	276
4. Cîteva unități de măsură	276
5. Constante fundamentale	278

1. MECANICA

1.1. Cîteva date asupra Pămîntului	281
1.2. Densitățile unor substanțe	282
1.3. Densitatea apei la diferite temperaturi	283
1.4. Proprietăți elastice ale unor materiale	283
1.5. Coeficienți de frecare la alunecare	283
1.6. Viteza sunetului în diferite materiale	284
Bibliografie	285

Redactor: A. HRISTEV
Tehnoredactor: V. UNGUREANU
Coperta: S. DUMITRESCU (A. HRISTEV)

Bun de tipar: 1.VIII. 1991

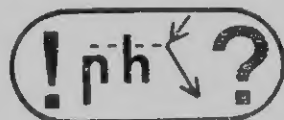
Apărut 1991

Format: 70 × 100/16. Coli de tipar: 18.

Tiparul executat la Tipografia „Universul”
c. 73

În aceeași serie

**BIBLIOTECA DE FIZICĂ
A ELEVULUI**



urmează să apară :

- TERMODYNAMICA
 - ELECTRICITATE
 - OPTICA. FIZICA ATOMICĂ
-
-

ISBN 973 — 95175 — 0 — 1
BUCUREȘTI 1991